

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 1日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740091

研究課題名（和文） 完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式の解析とその応用

研究課題名（英文） Analysis on Fully Nonlinear Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations and its Applications

研究代表者

滝本 和広 (TAKIMOTO KAZUHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：00363044

研究成果の概要（和文）：

完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式に対し、その境界値問題の可解性や解の振る舞いについて研究し、非線形現象の解明を目指した。幾何学的な構造を持った k -曲率方程式と呼ばれる完全非線形偏微分方程式の境界爆発問題の解の一意性、および平均曲率型の準線形放物型方程式における正值定常解の解構造および放物型方程式の解の時間無限大における挙動に関する新たな研究結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

We study the solvability of the boundary value problem and the behavior of solutions for fully nonlinear elliptic and parabolic partial differential equations. We also aim for the investigation of nonlinear phenomena. New results are obtained on the uniqueness of solutions to the so-called k -curvature equation, which is a fully nonlinear partial differential equation having geometric structure, and on the dynamics of the parabolic quasilinear problem of mean curvature type.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：非線形偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：完全非線形偏微分方程式・境界値問題・粘性解・解の存在と一意性・関数方程式

1. 研究開始当初の背景

自然現象や社会現象の数学的モデルとして偏微分方程式が登場するが、興味深い現象には非線形性が伴い、多くはモデルとなる微

分方程式が完全非線形偏微分方程式となる。しかし、完全非線形偏微分方程式はその非線形性の強さのため、従来の線形理論の延長線上では捉えきれない厄介な性質をもっている。1980年頃までは解析するための道具に

乏しく、最も強力な解析方法は確率論的な手法であった。偏微分方程式の言葉で理解され理論が成熟し始めたのはここ 20 年程のことであり、現在でも重要な未解決問題が多い。一方で、完全非線形偏微分方程式は、物理学・微分幾何学・確率制御問題・数理ファイナンスなど様々な分野に広く関係しており、その研究は非常に重要な意味を持つものである。

実際に現象を数理的に表現したり研究したりすると、曲面の幾何や曲面上の解析が重要であることが多い。例えば石鹸膜は表面張力によって表面積を小さくしようとするため、枠に張られた石鹸膜は極小曲面（平均曲率が 0 である曲面）を実現している。極小曲面に関する問題はプラトー問題をはじめとして多くの数学者の興味を引きつけ、現在でも精力的に研究が行われている。さらに、金属を焼き鈍す際の界面の運動、転がりながら摩擦する石の運動のモデルは、それぞれ平均曲率流方程式、ガウス曲率流方程式で記述される。

幾何学的な構造を持った微分方程式の中には、微分幾何学でお馴染みのモンジュ・アンペール方程式の一般化である「ヘッシアン方程式」や、極小曲面問題やガウス曲率方程式を一般化した「曲率方程式」がある。これらは一般に退化した偏微分方程式であるため、ごく特殊なケースを除いては解析するための強力な手段が少ない。本格的な研究が始まったのは 1980 年代以降であるが、解の構造の深い理解には程遠い状態である。さらに、極小曲面には様々な特異性が出現しうることからもわかるように、ヘッシアン方程式や曲率方程式の解析においては、古典解ばかりでなくしかるべき広義解や弱解の概念を導入し研究を行う必要がある。そこで、解のクラスを広げる努力が始まり、1990 年代初めに「粘性解」と呼ばれる広いクラスの解における可解性の研究が進んだ。ヘッシアン方程式において Trudinger-Wang は非斉次項が連続でない場合を研究し、粘性解よりも広い「weak solution」の概念を導入することで、その解の存在と一意性を示すことに初めて成功している。ところが、同じような広いクラスの解は曲率方程式に対しては発見されていなかった。それに対し、申請者は曲率方程式において「広義解」と呼ばれる解の概念を導入することに成功した。これにより、非斉次項がボレル測度のときの曲率方程式の広義解の可解性を考える準備ができたことになる。

さらに、孤立特異点または特異集合のまわりにおける解の挙動などといった解自身の性質については、主に半線形および準線形偏微分方程式に関してはなされてきたが、完全非線形な方程式では殆ど知られていなかっ

た。こうした定量的な性質を得るには方程式に対する深い考察が必要である。

こうした流れの中で、これまで特に曲率方程式に関して次のような研究結果を得ていた。まず、粘性解のクラスにおいて、曲率方程式の孤立特異点の除去可能性についての結果を得た。これは取り扱いが比較的易しい平均曲率方程式に関する結果を数十年ぶりに一般の場合に拡張したものである。その後、先程述べた広義解の概念を用いると、 k 次基本対称関数により定まる曲率方程式においては $(n-k)$ 次元ハウスドルフ測度が 0 であるコンパクト集合が常に除去可能であることを証明した。ここで n は空間次元である。また、曲率方程式において「境界爆発問題」と呼ばれる境界値問題の解の存在・非存在および境界付近における解の挙動に関する結果を得た。これらの結果の多くは曲率方程式に対する既存の研究方法とは異なる方法で得られたものであり、その解構造を深く理解する上での端緒となるとともに、非線形偏微分方程式の解析に新たな展開が得られると期待される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形性が非常に強く、解析するための道具が少ないために取り扱いが困難である完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式に対し、その境界値問題の可解性や解の振る舞いについて考察することである。さらに、その中でも幾何学的な構造を持ったヘッシアン方程式や曲率方程式と呼ばれる方程式について詳細な解析を行うことで、非線形現象の解明を目指す。

偏微分方程式において解の存在・一意性を調べることは重要な研究テーマの一つであり、「永遠のテーマ」でもある。その際、解の存在・一意性を研究するための強力な手法が解のアプリオリ評価と比較原理である。しかし、一般にアプリオリ評価を得るための条件は厳しく、例えば領域に角があったり、非斉次項の関数がある程度滑らかでなかったりすると条件は満たされない。そうしたとき、粘性解や広義解などの弱い意味の解として考えると、扱える問題の範囲が広がるので大変有用であり、応用上にも弱い意味の解の研究は大変意義深い。一方で、解の滑らかさについて考察することも重要である。本研究では古典解・弱い意味の解の双方を対象とする。

また、一般の（仮定をできるだけ弱めた）完全非線形偏微分方程式に対してだけでなく、幾何学的な構造を持ったヘッシアン方程式や曲率方程式などの詳細な解析を行うことで、非線形現象の解明も行う。

3. 研究の方法

研究を遂行するため、完全非線形偏微分方程式などに関する先行研究の文献を調査し、国内外の研究者との研究連絡および情報収集を行うため学会・研究集会に参加した。国内の非線形偏微分方程式論の専門家との研究討議を積極的に行うと共に、平成22年はドイツと中華人民共和国、平成23年はイタリア、平成24年は中華人民共和国での国際研究集会に参加して国外の研究者との意見交換を行った。その結果、次項に述べる研究結果を得ることができた。また、文献調査のために書籍を、論文作成・資料整理の必要上パーソナルコンピュータを購入した。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

- (1) 平均曲率型の準線形放物型方程式に関する研究を行った。正值定常解の解構造および放物型方程式の解の時間無限大における挙動について考察した。その結果をまとめた論文2編がそれぞれ Journal of Differential Equations 誌および Nonlinear Analysis 誌に掲載された。(S. Cano-Casanova 氏 (Comillas 大学), J. Lopez-Gomez 氏 (Complutense 大学) との共同研究)
- (2) k 次基本対称関数 ($k=1, \dots, n$, ここで n は空間次元) により定まる曲率方程式 (以下, k -曲率方程式と呼ぶ) について研究を行った。与えられた領域の境界に近づくとき解が正の無限大に発散するという境界条件 (境界爆発条件) を課した k -曲率方程式については、粘性解のクラスにおける解の存在・非存在, および境界付近における解の挙動に関する結果が既に得られているが、新たに解の一意性に関する解析を行った。解の一意性についての結果は、 k -曲率方程式の特別な場合である平均曲率方程式 ($k=1$) に対しても新しいものである。その結果をまとめた論文が Journal of Mathematical Analysis and Applications 誌に掲載された。(中森さおり氏 (広島大学) との共同研究)
- (3) ある条件を満たす一般の完全非線形楕円型・放物型方程式の粘性解において、1つの等高面は常に除去可能であることを証明した。この種の研究はこれまで半線形および準線形方程式に対してのみ行わ

れてきたが、完全非線形方程式に対しては本研究が初めてである。さらに、本研究の結果は既知の結果の多くを含むものとなっている。

- (4) 極小曲面に関して Bernstein は「 \mathbb{R}^2 全体で定義された関数 $z=f(x, y)$ が極小曲面方程式を満たすならば、 f は x, y に関する1次式である」という定理を証明した。我々は Bernstein の定理の類似物が、ある種の完全非線形偏微分方程式に対しても成立するかどうかを考察した。得られた研究結果をまとめた論文は投稿準備中である。(中森さおり氏 (広島大学) との共同研究)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. Saori Nakamori and Kazuhiro Takimoto, Uniqueness of boundary blowup solutions to k -curvature equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 399 (2013), 496-504.
2. Santiago Cano-Casanova, Julian López-Gómez and Kazuhiro Takimoto, A weighted quasilinear equation related to the mean curvature operator, Nonlinear Analysis, 査読有, 75 (2012), 5905-5923.
3. Santiago Cano-Casanova, Julian López-Gómez and Kazuhiro Takimoto, A quasilinear parabolic perturbation of the linear heat equation, Journal of Differential Equations, 査読有, 252 (2012), 323-343.
4. Kazuhiro Takimoto, Removability of level sets for two classes of fully nonlinear equations, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録「現象解析と関数方程式の新展開 (New Developments of Functional Equations in Mathematical Analysis)」, 1702 (2010), 158-171.

[学会発表] (計12件)

1. 滝本和広, The dynamics of a quasilinear equation related to the mean curvature operator, 東北大学非線形偏微分方程式ワークショップ, 2012年

- 9月27日, 東北大学.
2. 中森さおり, 滝本和広, Bernstein type theorem for (k, l) -Hessian quotient equation, 日本数学会 2012 年度年会 (函数方程式論分科会), 2012 年 3 月 27 日, 東京理科大学.
 3. Kazuhiro Takimoto, The dynamics of a quasilinear equation associated to the mean curvature operator, 武漢大学 数学与統計学院学術報告 (Symposia), 2012 年 3 月 9 日, 武漢大学 (中華人民共和国).
 4. Kazuhiro Takimoto, The existence and uniqueness of boundary blowup solutions to k -curvature equation, 東工大数理解析研究会, 2012 年 2 月 6 日, 東京工業大学.
 5. 中森さおり, 滝本和広, Bernstein type theorem for (k, l) -Hessian quotient equation, 平成 23 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2012 年 1 月 22 日, 岡山大学.
 6. 滝本和広, Global solutions to some types of Hessian quotient equations, 広島応用解析セミナー (第 16 回), 2011 年 8 月 31 日, 広島大学.
 7. Kazuhiro Takimoto, Bernstein type theorem for Hessian quotient equations, INdAM Workshop (Second Italian-Japanese Workshop), Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 2011 年 6 月 22 日, Palazzone di Cortona (イタリア).
 8. 滝本和広, The existence and uniqueness of boundary blowup solutions to k -curvature equation, 解析ゼミ・デラックス!, 2011 年 3 月 9 日, 埼玉大学.
 9. Kazuhiro Takimoto, On the existence and uniqueness of boundary blowup solutions to k -curvature equation, Sino-Chilean Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Nonlinear Analysis, 2010 年 12 月 9 日, 武漢大学 (中華人民共和国).
 10. 滝本和広, On the existence and uniqueness of boundary blowup

solutions to k -curvature equation, 洞爺解析セミナー, 2010 年 9 月 29 日, 洞爺山水ホテル和風.

11. 滝本和広, Uniqueness of a boundary blowup solution to k -curvature equation, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会 (函数方程式論分科会), 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学.
12. Kazuhiro Takimoto, On the uniqueness of a solution to the boundary blowup problem for curvature equation, 8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010 年 5 月 26 日, Dresden University of Technology (ドイツ)

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

滝本 和広 (TAKIMOTO KAZUHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 00363044

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: