

平成 26 年 4 月 11 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740099

研究課題名(和文)作用素環論における群作用の研究

研究課題名(英文)Study of group actions on operator algebras

研究代表者

松井 宏樹 (MATUI, HIROKI)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40345012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環への群作用や関連する課題について研究した。とりわけ、位相空間の非可換化である単純核型 C^* 環の研究に重点的に取り組んだ。まず、単純核型 C^* 環への様々な群作用をコサイクル共役で分類した。具体的には、無限型UHF環への有限生成自由アーベル群の作用の一意性を得た。さらに、多くの単純核型 C^* 環がその K 群によって分類されることも示した。また、極小力学系に付随する位相充足群が色々な興味深い性質を持つことも示した。

研究成果の概要(英文)：I studied group actions on operator algebras and related topics. In particular, I focused on simple nuclear C^* -algebras, which can be thought of as non-commutative topological spaces. First, various group actions on simple nuclear C^* -algebras were classified up to cocycle conjugacy. For instance, uniqueness of actions of finitely generated free abelian groups on UHF algebras of infinite type was obtained. Secondly, it was proved that a large class of simple nuclear C^* -algebras are classified by their K -groups. Also, I showed that topological full groups associated with minimal dynamical systems have various interesting properties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：作用素環

1. 研究開始当初の背景

作用素環への群作用の解析は、作用素環論が創始された当初から現在に至るまで、中心的な課題であり続けている。作用素環は von Neumann 環と C^* 環に大別される。可測空間の非可換化である von Neumann 環の場合には、Fields 賞を受賞した A. Connes による業績などによって、従順な群作用の分類やエルゴード論との密接な関わりなど、既に多くの重要な成果が得られている。しかし、位相空間の非可換化である C^* 環の場合には様々な技術的困難が発生し、包括的な研究を妨げている。

C^* 環と群作用に関して研究開始当初までに得られていた重要な成果としては、AT 環や Kirchberg 環上の自己同型の研究(岸本晶孝・中村英樹)・単純な C^* 環への有限群作用の研究(泉正己)・コントロール集合上の極小同値関係の軌道同型による分類(T. Giordano・松井宏樹・I. F. Putnam・C. F. Skau)・AF 環や Kirchberg 環への Z^2 作用の分類(泉正己・勝良健史・松井宏樹)などがあげられる。

2. 研究の目的

(1) 単純な C^* 環への群作用をコサイクル共役で出来るだけたくさん分類することを目指す。von Neumann 環の場合には、超有限因子環への従順離散群の作用の分類が既に完成している。しかし C^* 環の場合には、K 理論的障害を含む様々な困難が発生するため、全ての従順群を統一的に扱うことは(少なくとも現時点での技術では)難しい。そのため当該研究では考察の対象を poly- Z 群(各剰余群が整数群 Z となる正規列を持つ群)に限定する。

(2) 位相空間への極小な Z^N 作用から生じる接合積 C^* 環の構造解析を目指す。作用が極小であるとは自明でない不変閉集合が無いことを言い、それは接合積 C^* 環が単純であることと同値である。また、この設定から生じる C^* 環は核型となる。単純核型 C^* 環の分類理論は現在最終段階に近付いている。接合積 C^* 環が、分類理論が適用可能なクラスに入るかどうかを、明らかにしたい。

(3) コントロール集合への離散群の極小作用や、コントロール集合上の極小同値関係を、多角的に研究する。一つの目的は、極小同値関係を軌道同型で分類することである。さらに、軌道同型による分類と、同値関係から生じる C^* 環の分類との、相互関係についても明らかにしたい。もう一つの目的として、コントロール集合上の同値関係から生じる位相充足群の研究がある。この種の群の同型類を調べたり、群の解析的・幾何的・代数的な性質を研究する。

3. 研究の方法

(1) 単純 C^* 環への群作用の分類に関しては、標的とする C^* 環を適切に限定したうえで、その C^* 環の特性に見合った方向性を定めなければならない。まず、最も基本的な C^* 環である UHF 環(行列環の無限テンソル積)への群作用を考察する。UHF 環への Z^2 作用については、

T. Katsura, H. Matui,
Classification of uniformly outer actions of Z^2 on UHF algebras,
Adv. Math. 218 (2008), 940-968.

によって完全分類が得られているので、この成果を足掛かりとする。次に、Kirchberg 環と呼ばれる C^* 環のクラスを研究の対象とする。このクラスの環は、Kirchberg-Phillips の理論により、KK 理論によって分類されることが既に分かっている。また、Kirchberg 環へのある種の Z^2 作用の分類が

M. Izumi and H. Matui,
 Z^2 -actions on Kirchberg algebras,
Adv. Math. 224 (2010), 355-400.

によって既に得られている。この論文においては、作用の Rohlin 性の重要性とともに、作用の approximate representability という性質の重要性が明らかにされた。この点を踏まえて、Kirchberg 環への群作用の分類をさらに発展させる。

(2) コンパクトハウスドルフ空間上の極小 Z^N 作用から生じる接合積 C^* 環は、安定有限な単純核型 C^* 環となる。安定有限な単純核型 C^* 環が K 理論によって分類可能なクラスに入るかどうかを特徴付けるとい問題が、重要視されている。特徴付けを与える条件として、strict comparison・ Z -stability・finite decomposition rank という3つの条件が有力視されており、これら3つの条件は互いに同値なのではないかと思込まれている(Toms-Winter 予想)。先行研究により、 Z -stability が strict comparison を導くことや、finite decomposition rank が Z -stability を導くことが、既に分かっている。問題はこれらの逆を示すことである。von Neumann 環の理論で用いられた手法やアイデアを消化吸収することにより、この問題の解決に向けて取り組む。

(3) コントロール集合への群作用やコントロール集合上の同値関係を統一的に扱う枠組みとして、groupoid の概念が有効である。特にこの設定では、適切な位相が入った etale groupoid と呼ばれる対象を扱うのが妥当である。2つの同値関係が連続軌道同型であることと、対応する etale groupoid が同型であることが、同値である。また、etale groupoid に付随する位相充足群を自然に定義することが出来る。etale groupoid の位相充足群やホモロジーについては

H. Matui,

Homology and topological full groups of étale groupoids on totally disconnected spaces,
Proc. London Math. Soc. 104 (2012), 27-56.

という先行研究があり、これを足掛かりとする。

4. 研究成果

(1) UHF 環への Z^N 作用の分類を模索したが、 $N=3$ のケースでさえ作用の Rohlin 性を示す困難性に直面した。そこで考察対象を無限型と呼ばれる UHF 環に限定した。無限型の場合には、結果的に Z^N 作用の一意性が得られる。作用が一意的であるがゆえに、その作用は自動的に Rohlin 性と approximate representability の両方を兼ね備えることが示され、帰納法が機能する。この成果は論文[7]にまとめられた。

Kirchberg 環への poly- Z 群の作用の分類についても進展を得た。まず、Cuntz 環 O_2 や O_∞ への poly- Z 群の作用の一意性を示した。証明の鍵となったのは Rohlin 性と approximate representability である。また任意の可算従順群が O_∞ への外部的で asymptotically representable な作用を持つことも示した。Kirchberg 環への poly- Z 群の外部的な作用は、必ず O_∞ への外部的な作用を吸収することも示した。これらの成果をもとにして外部的な作用の分類を目指し、結果として、Hirsh length が 3 以下の場合の分類を得た。さらに研究を継続して分類の完成を目指す。

また、Jiang-Su 環と呼ばれる、分類理論において最も重要な位置を占める C^* 環についても研究し、Jiang-Su 環への Klein bottle 群の作用の一意性を示した。この成果は論文[4]にまとめた。

(2) 単位元を持つ単純核型 C^* 環の K 理論による分類は、1990 年代以降に大きな進展を遂げ、現在その最終段階を迎えつつある。トレースを持たない C^* 環の中には、 K 理論による分類が不可能であるようなものが存在することが分かっている。そこで、分類理論の範疇に入るような、性質の良い C^* 環を適切に特徴付けるといった問題が現在最も重要視されている。具体的には、strict comparison・ Z -stability・finite decomposition rank という 3 つの条件の同値性を問う Toms-Winter 予想が注目されている。私は、トレースの個数に関する一定の仮定の下に、論文[6]において strict comparison から Z -stability が従うことを示し、さらに論文[2]において Z -stability と quasi-diagonality から finite decomposition rank が従うことを示した。この成果は C^* 環の分類理論の最終段階における大きなブレークスルーとみなされている。実際、この成果を用いて、位相空間

への極小な Z^N 作用から生じる接合積 C^* 環の分類が得られる。また論文[2]では、主結果の応用として、Powers-Sakai 予想の否定的解決を得た。

(3) 論文[5]で、コントロール集合への極小 Z 作用から生じる位相充足群が有限生成のとき、exponential growth を持つ事を示した。最近の Juschenko-Monod の研究により、この群は従順であることが分かっている。私の以前の研究成果と組み合わせることにより、単純で有限生成な可算無限従順群の例が非可算個得られたことになる。

論文[3]では、2 つの極小力学系から生じる位相充足群が互いに同型であることの必要十分条件は、力学系が連続軌道同型であることを示した。さらに有限型サブシフトから生じる位相充足群の性質を詳しく調べた。具体的には、交換子群が単純になること、アーベル化がホモロジー群で記述できること、交換子群が有限表示性を持つことなどを示した。このケースの位相充足群は自由群を含むため従順にはならないが、それを少し弱めた Haagerup 性を持つことも証明した。

2 つの有限型サブシフトが連続軌道同型であるための必要十分条件を求めることは長年の未解決問題であったが、これを論文[1]で完全に解決した。証明には groupoid のアイデアが決定的に重要な役割を果たす。系として、Cuntz-Krieger 環とそのカルタン部分環の組の完全分類が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

[1] K. Matsumoto, H. Matui, Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras, to appear in Kyoto J. Math. 査読有

[2] H. Matui, Y. Sato, Decomposition rank of UHF-absorbing C^* -algebras, to appear in Duke Math. J. 査読有

[3] H. Matui, Topological full groups of one-sided shifts of finite type, to appear in J. Reine Angew. Math. 査読有

[4] H. Matui, Y. Sato, Z -stability of crossed products by strongly outer actions II, to appear in Amer. J. Math.

査読有

[5] H. Matui,
Some remarks on topological full groups of
Cantor minimal systems II,
Ergodic Theory Dynam. Systems 33 (2013),
1542--1549.
doi:10.1017/S0143385712000399
査読有

[6] H. Matui, Y. Sato,
Strict comparison and Z-absorption of
nuclear C*-algebras,
Acta Math. 209 (2012), 179--196.
DOI:10.1007/s11511-012-0084-4
査読有

[7] H. Matui,
Z^N-actions on UHF algebras of infinite
type,
J. Reine Angew. Math. 657 (2011),
225--244.
DOI:10.1515/CRELLE.2011.065
査読有

〔学会発表〕(計7件)

[1] H. Matui,
Minimal dynamical systems and simple
C*-algebras,
The Asian Mathematical Conference 2013,
2013年7月2日
釜山(韓国)

[2] H. Matui,
Recent progress in classification of
simple C*-algebras,
Nordic Congress of Mathematicians,
2013年6月12日
ルンド大学(スウェーデン)

[3] H. Matui,
Topological full groups of etale
groupoids,
C*-Algebras, Dynamics, and
Classification,
2012年10月30日
オーバーヴォルフアッハ数学研究所(ドイツ)

[4] 松井宏樹
Jiang-Su 環への群作用について
日本数学会年会 特別講演
2012年3月28日
東京理科大学

[5] H. Matui,
Group actions on simple stably finite
C*-algebras,
Conference on C*-Algebras and Related
Topics,

2011年9月5日
京都大学数理解析研究所

[6] H. Matui,
Group actions on simple stably finite
C*-algebras,
Conference on Structure and
Classification of C*-algebras,
2011年6月8日
Centre de Recerca Matematica(バルセロナ・
スペイン)

[7] H. Matui,
Classification of Z^N-actions on simple
C*-algebras,
Classification of amenable C*-algebras,
2010年9月22日
バンフ国際研究所(カナダ)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
松井 宏樹(MATUI HIROKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40345012

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし