

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 2 日現在

機関番号：11501

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2012

課題番号：22840003

研究課題名（和文） デザイン理論を用いた符号・格子及び頂点作用素代数の研究

研究課題名（英文） Research on codes, lattices, and vertex operator algebras using design theory

研究代表者

三枝崎 剛 (MIEZAKI TSUYOCHI)

山形大学・地域教育文化学部・講師

研究者番号：60584068

研究成果の概要（和文）：

符号，格子，頂点作用素代数という互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。3 者は，類似した性質を数多く持ち，例えば最小距離や t -デザインという概念が，それぞれに定義されている。特に符号はもともと情報伝達的手段，効率化を目的に導入された概念であり，実生活にも幅広い応用を持つ。本研究では，3 者の分類に向けて，幾つかの数学的性質を明らかにした。例えば，特別な場合に対し，最小距離の上界の決定や， t -デザインの分類を行った。

研究成果の概要（英文）：

Codes, Lattices, and Vertex Operator Algebras are important mathematical objects with many similar properties. For example, designs and minimum distances are defined on the three objects. Originally, the coding theory was introduced for the purpose of communication, hence, it has wide application in real life. In this study, I investigated some property of the three objects for some cases. For example, I determined the minimum bounds and classified t -designs for some cases.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,250,000	375,000	1,625,000
2011年度	853,600	345,000	1,198,600
2012年度	296,400	0	296,400
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：代数的組合せ論

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：代数的組合せ論，符号，格子，頂点作用素代数，保型形式，モックテータ関数，フーリエ係数，デザイン理論

1. 研究開始当初の背景

符号，格子，頂点作用素代数という互いに密接な関係を持つ数学的対象がある。3 者は，類似した性質を数多く持ち，例えば最小距離や t -デザインという概念が，それぞれに定義されている。特に符号はもともと情報伝達的手段，効率化を目的に導入された概念であり，実生活にも幅広い応用を持つ。従って 3 者の分類問題は，実生活への応用上も，数学的にも面白い重要な問題である。

研究開始当初，この 3 者を最小距離やデザ

イン理論の観点から統一的に扱おうという試みは少なかった。これら 3 者の分類に向けて，それぞれに定義されている，最小距離の上界の決定や， t -デザインの分類は 3 者の分類に役立つ事が知られており，従って，それぞれの数学的性質を明らかにすることを本研究の目的とした。

2. 研究の目的

既に述べたように，3 者を分類する事は，代数的組合せ論の最も重要な研究の 1 つである。その中でも特に対称性の高い自己双対

と呼ばれる対象の分類は、分類完成へ向けての第1歩として、盛んに研究されている。

(1) 符号

F_2 を位数 2 の有限体, Z_{2k} を法 $2k$ で考えた整数環とする. n 次元ベクトル空間 F_2^n (又は有限環 Z_{2k}^n の線形部分空間 (又は部分 Z_{2k}^n -加群) を長さ n の F_2 - (Z_{2k} -) 符号と呼ぶ. 符号の元の間には, ある距離が定義されており, 符号の元の個数に比べて最小距離 (最小となる距離) が大きい符号は, 情報通信の際, 高い誤り訂正能力を持ち, 実は数学的にも面白い対象である. つまり, 符号の元の個数を固定した時, 最小距離は出来る限り大きくしたい. また, F_2 - (Z_{2k} -) 符号において, 符号の全ての元の距離が, 4 の倍数 ($2k$ の倍数) となっている自己双対符号は, Type II 符号と呼ばれ, 自己双対符号の中でも, 特に面白い符号である事が知られており, 分類する事は重要な問題である.

1つの分類の手段として, F_2 - (Z_{2k} -) 符号に対して, 最小距離 d_2 (d_k) の上界が調べられてきた. 例えば Type II F_2 -符号については, [Mallows, Sloane (1973)] によって, Type II Z_4 -符号は, [Bonnetcaze, et al. (1997)] によって, 長さ n の符号に対し次の様な上界が求められている. この上界を達成する時, 符号は極限的と呼ばれる. 極限的な符号は高い誤り訂正能力をもち, 更に, 数学的に興味深い組合せデザインと呼ばれる, 対称性の高い構造を持つ事が知られている. 即ち, 最小距離の上界を決定する事は, 分類においても, 性能の良い極限的な符号の発見においても重要である. しかし極限的な Type II F_2 -符号は, 長さ n が十分大きい時, 存在しない事が分かっている [Mallows, Sloane (1973)].

(2) 格子

球面 t -デザイン [Delsarte, et al. (1977)] という概念がある. (以後 t -デザインと呼ぶ) と呼ばれる. t -デザインとなる有限集合は, 球面を多項式の積分に関してよく近似しており, その事から, 物理学, 気象学, 統計学などへの幅広い応用を持ち, 現在まで活発に研究されてきた. X が t -デザインだが, $(t+1)$ -デザインでない時, t を X のデザインの強さと呼ぶ. デザインが強い程, 対称性が高い事が知られており, その様な集合を見付ける事は数学的に面白い問題である.

球面デザインを構成する方法は幾つか知られているが, その1つに格子を用いる方法がある. ここで, 格子の原点からの距離が等しい格子点の集合 (シェルと呼ぶ) は, 球面上の点集合と考えられ, 格子から球面デザインを構成する方法とは, そのシェルから t -デザインを構成しようというものである. シェルのデザインの強さを決定すると, 格子の分類に役に立つ事が知られており [Nottebaum (1995)], また整数論への応用も

ある. 従って, シェルのデザインの強さを決定は重要な問題である.

(3) 頂点作用素代数

散在型の有限単純群の中で, 最も位数の大きい群は, モンスター群と呼ばれる. モンスター群に関するムーンシャイン予想の解明の為に, [Borcherds (1986)] によって導入された概念に頂点作用素代数 (以下 VOA と略す) と呼ばれる無限次元の代数系がある. 近年, [Hoehn (2008)] により, 球面デザインの類似として VOA, 及び VOA の加群に対し, 共形 t -デザインという概念が定義された (以後 t -デザインと呼ぶ). VOA V の対称性が高いほど, t の値が大きくなるよう定義されている. 符号及び格子と同様 VOA にも最小距離が定義され, その上界が求められており, その上界を達成する時極限的と呼ばれる. 極限的な VOA は対称性が高いと予想され, 実際自己双対 VOA に関して証明されている. また, VOA の共形デザインの強さ (球面デザインと同様に定義される) を決定する事は, VOA の分類に役に立つ事が知られている [Hoehn (2008)].

3. 研究の方法

現在までの最小距離やデザイン理論の研究で, 格子のテータ級数のモジュラー不変性を用いたものは少ない. 従って3者ともに不変式環や保型形式のモジュラー普遍性を用いた方法を考える.

また, デザインの強さの決定問題などは, 符号・格子の組合せ論的な性質を, 余り用いていない. これを改良する方法を開発する.

一般に VOA の共形 t -デザインの強さを調べる事は容易ではない. しかし, 現在調べられている例を参考にし, 多くの格子 VOA を取り上げて, 共形 t -デザインの強さを調べるため, 次のような方法を考える. 共形 t -デザインを調べる際, ある作用のトレースの値を知る必要があるが, 一般に格子 VOA のトレース関数は, モジュラー不変性を持っている事が知られている [Dong, et al. (2001)]. 一方, モジュラー不変性を持った関数の空間は, 詳しく調べられており, それを用いてトレースの値を計算する方法である.

Z_k -符号から良い組合せデザインを作る方法を確立するため, Venkov によって, 極限的格子から良い球面デザインを作る構成法が知られているが, この方法を符号に適用する計画である.

Pache は自己双対格子に対してデザインの強さを調べた. この続きとして l -モジュラー格子についてデザインの強さを調べたい. 具体的方法は [Rains, Sloane (1998)] により, 特定の l に対して, l -モジュラー格子のテータ級数が詳しく調べられている. 「研究目的」で述べた様に, 格子の球面デザインとテータ級数の係数が 0 になるか否かは対応しており,

調べる事が出来ると考えている。

符号を使い、格子及びVOAを構成出来る、格子を使いVOAを構成出来る事が知られている。では、互いに構成される関係にある時、デザインも関係しているのではないか、という問題を考える計画である。これにより、VOAのデザインを調べる事は、一般にとっても大変なのだが、デザインの対応を用いる事で、簡単に調べる事が可能になるのではないかと予測している。

4. 研究成果

平成23年度及び、繰越した平成24年度においては、大きく分けて4つの研究を行った。1つ目は72次元の極限的TypeII格子がG. Nebeにより発見されたが、その格子を用い、72次元のoptimalな自己双対格子を構成した。2つ目は、Assmus-Mattsonの定理により符号から組合せ5-デザインが構成されるが、6-デザインは構成されない事を多くの符号について示した。3つ目は、格子のフレームの存在性である。格子のフレームは符号やVOAと密接に関係するが、その存在性は、ランクが24以下の特別な格子についてのみ解決されていた。この結果を大幅に拡張し、ランク64までの特別な格子に対して存在性を決定した。これにより、長さ64以下の極限的 Z_{2k} -符号の存在も決定した。4つ目は、近年発見されたマッシュームーンシャイン現象に現れる、モックテータ関数のフーリエ係数について研究した。マッシュームーンシャイン現象とは、あるモックテータ関数のフーリエ係数が、一番大きなマッシュームーン群の既約表現の次元の正整数係数の線形結合で書けるであろうというものである。この現象に現れる、McKay-Thompson級数のフーリエ係数の持つ合同式を多数発見した。この現象に現れるモックテータ関数は、ラマヌジャンの発見した多くのモックテータ関数を含む。これにより、Cheng-Duncan-Harveyの予想も解決した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Tsuyoshi Miezaki, On a generalization of spherical designs, *Discrete Math.* 313 (2013), no. 4, 375-380, 査読有, 10.1016/j.disc.2012.11.012.
- ② Tsuyoshi Miezaki, Conformal designs and D.H. Lehmer's conjecture, *J. Algebra* 374 (2013), 59-65, 査読有, 10.1016/j.jalgebra.2012.10.019.
- ③ Tsuyoshi Miezaki, Frames in the odd Leech lattice, *J. Number Theory* 132 (2012), no. 12, 2773-2778, 査読有, 10.1016/j.jnt.2012.05.030.
- ④ Tsuyoshi Miezaki, Makoto Tagami, On

Euclidean designs and potential energy, *Electron. J. Combin.* 19

(2012), no. 1, Paper 2, 18 pp, 査読有, <http://arxiv.org/pdf/1109.2226.pdf>.

- ⑤ Tsuyoshi Miezaki, On the Mathieu mock theta function, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 88 (2012), no. 2, 28-30, 査読有, 10.3792/pjaa.88.28.
- ⑥ Eiichi Bannai, Tsuyoshi Miezaki, On a property of 2-dimensional integral Euclidean lattices, *J. Number Theory* 132 (2012), no. 3, 371-378, 査読有, 10.1016/j.jnt.2011.07.011.
- ⑦ Eiichi Bannai, Tsuyoshi Miezaki, Vladimir A. Yudin, An elementary approach to toy models for D.H. Lehmer's conjecture (Russian), *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 75 (2011), no. 6, 3-16, 査読有; translation in *Izv. Math.* 75 (2011), no. 6, 1093-1106, 査読有, 10.1070/IM2011v075n06ABEH002565.
- ⑧ Masaaki Harada, Tsuyoshi Miezaki, An Optimal Odd Unimodular Lattice in Dimension 72, *Arch. Math. (Basel)* 97 (2011), no. 6, 529-533, 査読有, 10.1007/s00013-011-0333-3.
- ⑨ Masaaki Harada, Tsuyoshi Miezaki, An Upper Bound on the Minimum Weight of Type II Z_{2k} -Codes, *J. Combin. Theory, Ser. A* 118 (2011), no. 1, 190-196, 査読有, 10.1016/j.jcta.2010.02.007.
- ⑩ Tsuyoshi Miezaki, Nonexistence for extremal Type II Z_{2k} -Codes, *Kumamoto J. Math.* 23 (2010), 27-35, 査読有 <http://arxiv.org/pdf/0908.3185.pdf>.

[学会発表] (計18件)

- ① Tsuyoshi Miezaki, The McKay-Thompson series of Mathieu moonshine modulo two 日本数学会年会, 京都大学, 2013年3月22日.
- ② Tsuyoshi Miezaki, マッシュームーン群に関連した擬テータ関数に現れる合同式, 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2013年1月7日.
- ③ Tsuyoshi Miezaki, 有限群に関連した擬テータ関数に現れる合同式, 談話会, 近畿大学, 2012年12月21日.
- ④ On the existence of extremal Type II Z_{2k} -codes, 南九州代数系集会, 熊本大学, 2012年8月31日.
- ⑤ Tsuyoshi Miezaki, 符号と格子, 数学オリンピック財団主催夏季セミナー, ヴィラケケ滝, 2012年8月24日.

- ⑥ Tsuyoshi Miezaki, On the existence of extremal Type II Z_{2k} -codes, 第 29 回代数的組合せ論研究集会, 弘前大学, 2012 年 6 月 18 日.
- ⑦ Tsuyoshi Miezaki, Mathieu moonshine 現象における擬テータ関数, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学, 2012 年 3 月 26 日.
- ⑧ Tsuyoshi Miezaki, On the Mathieu mock theta function, Algebra Seminar, RWTH Aachen University (ドイツ), 2012 年 3 月 21 日.
- ⑨ Tsuyoshi Miezaki, Mathieu moonshine 現象における擬テータ関数, 第 164 回数理解情報科学談話会, 鹿児島大学, 2012 年 3 月 9 日.
- ⑩ Tsuyoshi Miezaki, 符号とデザイン, 小研究集会「有限幾何学とその周辺」, 大分大学, 2011 年 12 月 10 日.
- ⑪ Tsuyoshi Miezaki, 格子の性質「Universally Concyclic」について, 第 23 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2011 年 7 月 31 日.
- ⑫ Tsuyoshi Miezaki, Conformal designs based on lattice vertex operator algebras, Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics, 東北大学, 2011 年 1 月 25 日.
- ⑬ Tsuyoshi Miezaki, Toy models for D. H. Lehmer's conjecture, Algebra Seminar, Kansas State University (アメリカ), 2010 年 11 月 29 日.
- ⑭ Tsuyoshi Miezaki, An upper bound of minimum weight of Type II Z_{2k} -codes Combinatorics seminar, Beijing Normal University (中国), 2010 年 10 月 22 日.
- ⑮ Tsuyoshi Miezaki, An upper bound of minimum weight of Type II Z_{2k} -codes, Combinatorics seminar, Hebei Normal University (中国), 2010 年 10 月 19 日.
- ⑯ Tsuyoshi Miezaki, ルート格子 D_4 に付随した格子頂点作用素代数の共形デザインについて, 第 22 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2010 年 7 月 31 日.
- ⑰ Tsuyoshi Miezaki, 4 次直交群の有限部分群から構成される球面デザインについて, 第 27 回代数的組合せ論シンポジウム, 高知大学, 2010 年 6 月 21 日.
- ⑱ Tsuyoshi Miezaki, Type II Z_{2k} -符号の最小距離の上界, 及びその上界を達成する符号の非存在について, 数理科学セミナー, 高知大学, 2010 年 6 月 19 日.

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/tmiezaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三枝崎 剛 (MIEZAKI TSUYOCHI)

山形大学・地域教育文化学部・講師

研究者番号 : 60584068