

令和 7 年 5 月 30 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2022～2024

課題番号：22K03328

研究課題名（和文）Gabor解析における諸問題の解決

研究課題名（英文）Gabor analysis and related topics

研究代表者

小林 政晴（Kobayashi, Masaharu）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：30516480

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：今回の研究を通じて、調和解析や偏微分方程式の研究において重要な役割を果たす関数空間（ある性質を持つ関数の集まり）の基本性質の解明および偏微分方程式への応用を行った。主要な結果として次の成果が得られた。

- (1) ある種の滑らかさを持つ関数の集まり（関数空間）をその性質を変えることなく、再びある種の滑らかさを持つ関数の集まり（関数空間）に移すような作用関数（関数または変換）の特徴づけを得た。
- (2) モジュレーション空間がバナッハ代数として持つ性質（ウィーナー・レヴィ定理など）を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガボール解析において重要な役割を果たすモジュレーション空間（やそれに関連するような関数空間）はウェーブレットの理論の発展と共に、擬微分作用素やシュレディンガー方程式の研究などにおいて多くの興味深い研究成果を生み出してきた。しかし、新たな研究成果を生み出すには明らかにすべき多くの問題が残っている。今回得られた成果はこれらの問題の解決、更には調和解析や偏微分方程式の研究において現れる様々な関数空間や作用素の研究にも重要な役割を果たすと考えられる。

研究成果の概要（英文）：Through this project, we have clarified the basic properties of function spaces, which play an important role in the study of harmonic analysis and partial differential equations. The main results are as follows:

- (1) We have obtained a characterization of operating functions on some function spaces.
- (2) We have clarified the properties of modulation spaces as Banach algebras (such as the Wiener-Levi theorem).

研究分野：実函数論

キーワード：関数空間 モジュレーション空間 フーリエ・ルベグ空間 作用関数 スペクトル合成集合

1. 研究開始当初の背景

「Gabor 解析」とは、元々2つのアイデアから発展した研究分野である。1つは量子力学の数学的基礎付けで知られている J. von Neumann 氏とその著書 (J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin 1932) 中で述べた「Gauss 関数の平行移動と変調により生成される関数系は $L^2(\mathbf{R})$ (すなわち、 \mathbf{R} 上の 2 乗可積分関数全体) を生成する」というアイデアである。もう 1 つはホログラフィーの研究でノーベル物理学賞を受賞した D. Gabor 氏が 1946 年に発表した論文 (Gabor, D. (1946) *Theory of Communication*. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93, 429-441.) の中で用いた「Gauss 関数の平行移動と変調により生成される関数系を用いて、Fourier 級数展開のように \mathbf{R} 上の関数を展開する」というアイデアから発展した研究分野である。Gabor 解析における重要な研究テーマであり、これまで互いに影響を及ぼしあいながら発展してきた「Modulation 空間 (すなわち、1980 年頃にオーストリアの H. G. Feichtinger 氏により導入された関数空間の一つであり、短時間 Fourier 変換がある種の可積分性と減衰度をもつようなユークリッド空間上の関数の集まり)」と「Gabor 系の線形独立性問題 (すなわち、Heil-Ramanathan-Topiwala らが論文「Heil-Ramanathan-Topiwala, *Linear independence of time-frequency translates*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), no. 9, 2787-2795」の中で提案した Gabor 系の L^2 空間における線形独立性に関する予想)」を調和解析及び実解析的手法を用いてさらに発展させるために本研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究を通じて、調和解析や偏微分方程式の研究において重要な役割を果たす関数空間 (ある性質を持つ関数の集まり) の基本性質を解明する。

(1) 作用関数の特徴づけ: ある種の滑らかさを持つ関数の集まり (関数空間) をその性質を変えることなく、再びある種の滑らかさを持つ関数の集まり (関数空間) に移すような作用関数 (関数または変換) は何かを解明する。作用関数の特徴づけは非線形偏微分方程式の研究において重要な役割を果たすことが知られている。Modulation 空間 $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ における作用関数の特徴づけについては、Reich - Sickel (2016) や Kato - Sugimoto - Tomita (2020) で様々な十分条件が研究されているが、まだ完全に解決していない。

(2) Modulation 空間 $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ が Banach 代数として持つ性質は何かを解明する。特に「Modulation 空間 $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ において Wiener-Levy の定理が成り立つか (f すなわち、 f が $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ に属するとき、 $1/f$ も $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ に属するかという問題)」、 $M^{p,q_s}(\mathbf{R}^n)$ におけるスペクトル合成集合の解明とその特徴づけ、 $M^{p,q_s}(\mathbf{R})$ と Fourier-Segal 代数 $FA_p(\mathbf{R})$ の包含関係を解明する。ここでスペクトル合成集合の研究は「ある関数 f が集合 E 上で $f(x)=0$ であること」と「ある関数 f が集合 E の近傍で $f(x)=0$ であること」の違いを明らかにするために始まったものであり、古くから研究が行われている。特にフィールズ賞を受賞した L. Schwartz が $n \geq 3$ の場合は単位球面 S^{n-1} は Fourier 代数 $A(\mathbf{R}^n)$ (Fourier-Wermer 代数 $FL_{q_s}(\mathbf{R}^n)$ において $q=1, s=0$ の場合に対応する関数空間) においてスペクトル合成集合にならないことを証明し、多くの研究者を驚かせた。スペクトル合成集合の研究は偏微分方程式の解の一貫性問題にも応用されており、多くの研究者によって研究が行われている。

3. 研究の方法

(1) Y. Katznelson (1959) 及び N. Leblanc (1967, 1969) による「 $A^1_s(\mathbf{T})$ (すなわち、トーラス \mathbf{T} 上の関数でその Fourier 係数が重み付き数列空間 $l^1_s(\mathbf{Z})$ に属するような関数の集まり) における作用関数の特徴づけ」と研究代表者が佐藤圓治名誉教授 (山形大学) との共同研究で行った「Modulation 空間 $M^{p,1}(\mathbf{R})$ における作用関数の特徴づけ (Kobayashi, Masaharu; Sato, Enji, *Nagoya Math. J.* 230, 72-82 (2018))」及び「 $A^q_s(\mathbf{T})$ (すなわち、トーラス \mathbf{T} 上の関数でその Fourier 係数が重み付き数列空間 $l^q_s(\mathbf{Z})$ に属するような関数の集まり) における作用関数の特徴づけと Fourier-Wermer 代数 $FL^q_s(\mathbf{R}^n)$ (すなわち、Fourier 変換が重み付き Lebesgue 空間 $L^q_s(\mathbf{R}^n)$ に属するような関数全体) における作用関数の特徴づけ (Operating functions on $A^q_s(\mathbf{T})$, Kobayashi, Masaharu; Sato, Enji, *J. Fourier Anal. Appl.* 28 (2022), no. 3, Paper No. 42, 28 pp.)」を融合し、更に発展させる。

(2) H. Reiter (1968) による「古典調和解析の研究 (Classical harmonic analysis and locally compact Groups, Reiter, Hans; Stegeman, Jan D. *London Math. Soc. Monogr. (N.S.)*, 22, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, xiv+327 pp.)」

V.Losert (1980) による「Segal algebraの研究」及び「古典調和解析の方法や Gabor 解析の研究において蓄積した知識や方法」を研究代表者がこれまでに得た知識やテクニックと融合させる研究を行う。

4 . 研究成果

- (1) 最終的な目標は「Modulation 空間上での作用関数の特徴づけ」であるが、その第一歩として特別な指数 p, q, s に対して「Modulation 空間上の作用関数の特徴づけにおいて重要な役割を果たすと思われる必要条件と十分条件」を見つけた (A note on operating functions of modulation spaces, Kobayashi, Masaharu; Sato, Enji, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 13 (2022), no. 4, Paper No. 61, 17 pp.の掲載済み)。
- (2) 「Modulation 空間 $M^{p,1}_s(\mathbb{R}^n)$ において Wiener-Levy の定理が成り立つこと」, 「Modulation 空間 $M^{p,1}_s(\mathbb{R}^n)$ におけるスペクトル合成集合と Fourier-Lebesgue $FL^1_s(\mathbb{R}^n)$ におけるスペクトル集合が一致すること」, 「Modulation 空間 $M^{p,1}_s(\mathbb{R})$ と Fourier-Segal 代数 $FA^p(\mathbb{R})$ の包含関係」を解明した (On some properties of modulation spaces as Banach algebras, Feichtinger, Hans G.; Kobayashi, Masaharu; Sato, Enji, Studia Math. 280 (2025), no. 1, 55-86. に掲載済み)。その副産物として、「Modulation 空間の閉イデアルの新たな特徴づけ」や「Modulation 空間 $M^{p,2}_s(\mathbb{R}^n)$ が Sobolev 代数 $H^s(\mathbb{R}^n)$ における pointwise multiplier になる」ことを示せた。更にこの結果を発展させて、特別な指数 p, q, s に対して「Modulation 空間 $M^{p,q}_s(\mathbb{R}^n)$ において Wiener-Levy の定理が成り立つこと」及び「Modulation 空間 $M^{p,q}_s(\mathbb{R}^n)$ におけるスペクトル合成集合と Fourier-Wermer 代数 $FL^q_s(\mathbb{R}^n)$ におけるスペクトル集合が一致すること」を明らかにした (Further study of modulation spaces as Banach algebras, Feichtinger, Hans G.; Kobayashi, Masaharu; Sato, Enji, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 56 (2024), 151-166. に掲載済み)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kobayashi Masaharu, Sato Enji	4. 巻 13
2. 論文標題 A note on operating functions of modulation spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11868-022-00494-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Feichtinger Hans G., Kobayashi Masaharu, Sato Enji	4. 巻 56
2. 論文標題 Further study of modulation spaces as Banach algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eotvos Nominatae. Sectio computatorica	6. 最初と最後の頁 151 ~ 166
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.71352/ac.56.151	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Feichtinger Hans G., Kobayashi Masaharu, Sato Enji	4. 巻 280
2. 論文標題 On some properties of modulation spaces as Banach algebras	5. 発行年 2025年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 55 ~ 86
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/sm240316-9-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 Operating Functions on $A^q_s(T)$
3. 学会等名 Harmonic Analysis Seminar (ウィーン大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 On the spectral synthesis for the unit circle in $FL_s^q (R^2)$
3. 学会等名 Analysis Seminar (ジョージア工科大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 On the spectral synthesis for the unit circle in $FL_s^q (R^2)$
3. 学会等名 Analysis Seminar (タフツ大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 On the spectral synthesis for the unit circle in $FL_s^q (R^2)$
3. 学会等名 Seminari di Analisi Matematica dell'Universita e del Politecnico di Torino (トリノ大学) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 On the spectral synthesis for the unit circle in $FL_s^q (R^2)$
3. 学会等名 Winter Workshop: Fourier Analysis and its applications (Renyi Institute) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Masaharu Kobayashi
2. 発表標題 On the spectral synthesis for the unit circle in $FL_s^q(\mathbb{R}^2)$
3. 学会等名 Research Seminar Function Spaces (フリードリヒ・シラー大学イエーナ) (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 小林政晴
2. 発表標題 Operating functions on $A_s^q(T)$
3. 学会等名 偏微分方程式の解の特異性とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 小林政晴
2. 発表標題 On some properties of modulation spaces as Banach algebras
3. 学会等名 第46回 調和解析定例セミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストリア	ウィーン大学			