2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2022～2023
課題番号：２２Ｋ２０１３３

研究課題名（和文）バブルと感染爆発:　非エルゴード的時系列に対する統計的モニタリングと変化点検出

研究課題名（英文）Bubbles and pandemic outbreak: Statistical monitoring and change point detection in non ergodic time series

研究代表者
陶　俊帆（TAO, Junfan）

京都大学・経済研究所・講師

研究者番号：６０９６７０９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，時間とともに変化する社会現象や経済状況のデータをオンラインで観測される状況を考える。オンラインで観測されたデータに関して， 非エルゴード的自己回帰モデルおよび分枝過程に対する停止時刻を用いての統計的モニタリングの手法を提案した。
具体的に，自己回帰モデルについて、局所対立仮説での単位根検定の逐次Dickey-Fuller t検定の最適性を証明した。初期値がゼロではない場合の自己回帰モデルのDickey-Fullerによる単位根検定の帰無分布、対立分布の極限分布を求め、厳密分布との整合性を確認した。そして、データが逐次的に入ってくる際に検定を行う時の検定のサイズの漸近的挙動を確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
学術的には，モニタリング開始後に変化が予想されるとき，一定のサイズに対し第2種の過誤確率（変化が起きているのにアラームを発しない確率）を可能な限り小さく，この変化を迅速に検出することにあり，非エルゴード的問題に対し前向き研究である逐次的変化探索を考察するというである。社会的意義は，たとえばオンラインで観測された経済・金融市場において構造変化が想定される場合，バブルのような非定常状態がおきているかどうかをできるかぎり早く知り，意思決定を行う必要がある。こうした非定常性がもたらす危機を早期発見することにより，株式市場のバブルの発生や為替市場の不安定さを早期察知することに応用可能であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：This research considers the situation where data on social phenomena and economic conditions are sequentially collected online. The main research objective is to establish statistical monitoring methods using stopping times for non-ergodic time series in online observed data.
We showed the optimality of the sequential Dickey-Fuller t test for unit roots under the local-to-unity hypothesis in autoregressive models. For autoregressive models, when the initial values are non-zero, we derived the asymptotic distributions of the null and alternative distributions of the Dickey-Fuller unit root test and confirmed their consistency with the exact distributions. Furthermore, we examined the asymptotic behavior of the size of the test when conducting the test sequentially as data come in.

研究分野：計量経済学

キーワード：逐次検定　非エルゴート的過程　自己回帰モデル　単位根検定　分枝過程　臨界性検定

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

近年、インターネットの普及と技術の進歩により、膨大な量かつ多様な種類のデータが利用可能になってきた。本研究では，時間とともに変化する社会現象や経済状況のデータがオンラインで観測される場合に，想定するモデルでのターゲットとなるパラメータの観測 Fisher 情報量 (observed Fisher information) が事前に定められた水準まで蓄積した時点を，意思決定を行う時刻 (停止時刻) とし，その時点での統計量 (逐次統計量) で統計的推測を行うことを考える。

統計的逐次解析では，オンラインで経済・金融時系列といったデータが逐次観測されることを想定する。その際，観測が進んでいく間，モデルにより情報量の蓄積の度合いが異なることに着目し，充分な情報量を獲得した時点までサンプリングを続け，統計的推論を行う。

通常の統計解析を経済・金融のオンライン時系列データに当てはめると，サンプルサイズはデータが持っている情報量を反映しないので，時間、機会費用などのコストの面から見ると非効率的である。統計的逐次解析の方法は推論に必要なサンプルサイズを決められる点に利点があるといえる。

この研究の出発点は時系列の自己回帰(autoregressive: AR)モデルにおける単位根の逐次検定である。この場合非エルゴード的な状態であっても，観測 Fisher 情報量に基づく停止時刻をもちいる逐次統計量は漸近正規性を有し，それに付随する最適性があり、これはこの研究の理論の土台である。

2020 年 4 月から，新型コロナの影響で，想定するモデルのクラスを疫学で重要な分枝過程に広げた。分枝過程は条件付き不均一分散を有する誤差項を持つ整数値 AR(1)モデルとして認識され，一般化最小二乗法が適用可能である。そこで，上記の AR モデルと同様に観測 Fisher 情報量に基づく停止時刻を用いて統計的逐次分析手法を展開した。分枝過程は基本再生産数を 1 に近い局所パラメータを想定するとき Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 過程で近似でき，AR モデルと同じような統計的逐次解析手法が適用できることを確認した。

現実ではモデルが時間の変化で一定ではなく，時間の経過とともに構造変化が生じるため，変化点探索の統計的逐次解析が必要であると考え，本研究の着想に至った。

２．研究の目的

以上の学術的背景のもと、本研究では，金融市場のバブルやウイルスの感染爆発といった非定常・非エルゴード的な状態が生起する可能性がある時系列をオンラインでモニタリングする問題について考察する。特に「非エルゴード的時系列モデルの統計的逐次解析」と「構造変化の探索」を目的として取り組む。

本研究では，単位根検定，モデルの同定，推定，変化点の探索といった問題に関して，自己回帰の次数，和分次数，パラメータそれぞれについて停止時刻を複数つくり，時系列の統計的推測の手法を確立する。応用上では，経済・金融市場におけるバブルや感染爆発がもたらす危機の早期発見に役立てると考えている。

統計的逐次解析において，本研究の新規な部分は停止時刻と逐次統計量の漸近結合分布の導出により，複数の停止時刻と複数の逐次統計量による推測が行える点である。例えば，モデルの次数，単位根の存在，複数あるパラメータの推定，構造変化は，それぞれ順次，同定，検定，推定，検出といった推測を行うべきで，必要なサンプルサイズも異なる。刻一刻と更新されるオンラインデータではこうした一連の推測が，モデルの見直しの作業を含めて複数の停止時刻を用いて行われるべきであると考えられる。また，既存研究は非常に少なく，本研究で提案する理論は，立脚した数学的基礎が他の文献にはない点でも独創的な解析手法であると言える。

３．研究の方法

研究の方法としては、オンラインで観測されるデータに統計的逐次解析の手法を導入し，統計的逐次解析の理論を構築する。統計的逐次推定・検定の問題および逐次的変化点探索の問題では，非局所パラメータの場合と局所パラメータの場合があり，それぞれ重要であるが，時系列データが観測される場合，それらの問題を分析可能にする方法は，ターゲットパラメーターに局所対立仮説を想定し連続時間の確率過程の問題に帰着させることである。

応用上重要となるのは，第 1 種の誤りや第 2 種の誤りを犯す過誤確率や期待停止時刻といった動作特性（Operating Characteristics, OC）の解析的評価である。解析的評価は特殊関数でなされ，数値計算が可能となり，シミュレーションと比較することで有効性が確認される。
本研究で提案する統計的逐次解析による検定・変化点探索に関する OC は，離散時間モデルを連続時間モデルで近似したとき，ブラウン運動や拡散過程の汎関数の確率・期待値として表される。そのときそれらの値は、特殊関数を用いて数値解析が可能であることがわかる。

４．研究成果
主に時系列モデルに関する研究と分枝過程に関する研究 2 つの課題の研究を行っていた。具体的には,

1. 時系列モデルに関する研究

(1) AR(1)モデルに対する逐次検定の最適性。観測された Fisher 情報に基づく停止時間を用いた逐次サンプリング方式において、次数 1 の自己回帰過程（AR(1)）に対する単位根検定および局所対立仮説に関する逐次検定の最適性を研究した。最適性は、統計手法を評価するために望ましい性質である。提案した逐次的 Dickey-Fuller t 検定統計量は the uniformly most powerful invariant test の性質を持つことを証明した。　この研究結果は 2023 年 8 月東京大学で行われた Summer Econometrics Forum 2023 に報告しました。現在は研究論文を修正し、統計一流国際学術雑誌に投稿するための最終準備を進んでいる段階である。

(2) Dickey-Fuller 検定における初期値の影響についての統計的解析の理論研究。この研究では, 局所対立仮説のもとで, 1 階自己回帰過程に対する単位根検定の研究を行っていた。Dickey-Fuller 検定統計量の限界近似は、1 次元の二乗 Bessel 過程を介して表現される 2 つの積分の比である。我々は検定統計量の比率の分布を二乗 Bessel 過程とその積分の結合密度を導出し、検定統計量を計算することができます。Girsanov 定理を使って。局所対立仮説のもとでの Dickey-Fuller 検定を、正規分布の位置パラメータのシフトに関する検定に変換する。その結果を用いて、DF 検定のサイズ，パワー，臨界値などの動作特性を簡潔に計算する方法を提案した。Working paper は KIER Discussion Paper (1084)に公開して，修正して国際学術雑誌に投稿する予定である。

(3) 時系列のデータがオンラインで逐次的観測される状況を想定し、検定のサイズをコントロールする手法についての研究である。2023 年 8 月東大の Summer Econometrics Forum 2023 で報告した際、いただいたコメントから出発した研究である。研究の「問い」データが入っているたびに検定を行ったら、どうなるである。
先行文献としては、1970 年の Robbins の論文では、i.i.d.データが逐次的に到着し、データが入っているたびに検定統計量を繰り返し使用し検定を行う場合、検定のサイズ（真の帰無仮説を棄却する確率）が、検定を繰り返し適用する回数が増えるにつれて 1 に近づくことを証明した。こういう問題は本質的が多重検定問題である。2023 年度には, １次自己回帰モデルの帰無仮説が真である場合の第一種過誤をコントロールの研究が始まった。現在は,事前に決めた固定な有意水準において、反復対数の法則（the law of the iterated logarithm）を使って、第一種の誤りの漸近的行挙を確認した。この研究は進行中であり，一部の研究結果は 2024 年 1 月広島大学で行われた関西計量研究会、2024 年 3 月和歌山・白浜で行われる Spring Econometrics Forum で報告した。今後もこの研究を継続する予定である。

2. 分枝過程に関する研究

(1) 枝過程に対して統計的逐次分析手法の理論研究。オンライン観測される分枝過程を自己回帰過程の理論を用いて，基本再生産数についての臨界性検定に対して統計的逐次解析の研究を行っていた。分枝過程は条件付き不均一分散を有する誤差項を持つ整数値 AR(1)モデルとして認識され，一般化最小二乗法が適用可能である。そこで，AR モデルと同様に観測 Fisher 情報量に基づく停止時刻を用いて統計的逐次分析手法を展開した。分枝過程は基本再生産数を 1 に近い局所パラメータを想定するとき Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 過程で近似でき，AR モデルと同じような統計的逐次解析手法が適用できることを確認した。現在は研究成果をまとめた研究論文を執筆している。

参考文献：
1.　Robbins, H. (1970). Statistical methods related to the law of the iterated logarithm. The Annals of Mathematical Statistics, 41(5), 1397-1409.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　0件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kohtaro Hitomi, Jianwei Jin, Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama and Junfan Tao	４．巻 No. 1084
２．論文標題 Unit root tests considering initial values and a concise method for computing powers	５．発行年 2022年
３．雑誌名 KIER Discussion Paper Series,	６．最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kohtaro Hitomi, Keiji Nagai, Yoshihiko Nishiyama and Junfan Tao	４．巻 45A
２．論文標題 A Sequential Test For a Unit Root in Monitoring a p-th Order Autoregressive Process	５．発行年 2023年
３．雑誌名 In Essays in Honor of Joon Y. Park: Econometric Theory	６．最初と最後の頁 115-153
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1108/S0731-90532023000045A004	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 Junfan TAO
２．発表標題 An optimal invariant sequential unit root test
３．学会等名 Summer Econometrics Forum 2023, University of Tokyo, August 2023
４．発表年 2023年

１．発表者名 Junfan TAO
２．発表標題 An application of law of integrated logarithm to Dickey Fuller test
３．学会等名 The 31st Kansai Keiryo Keizaigaku Kenkyukai, Hiroshima University, January 2024
４．発表年 2024年

１．発表者名 Junfan TAO
２．発表標題 An application of law of integrated logarithm to Dickey Fuller test
３．学会等名 Spring Econometrics Forum, Shirohama, March 2024
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関