

令和 6 年 5 月 16 日現在

機関番号：17102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20340

研究課題名（和文）非コンパクト多様体上の退化双曲型偏微分方程式に対する逆問題解析

研究課題名（英文）Inverse problems for degenerate hyperbolic partial differential equations on manifolds

研究代表者

高瀬 裕志 (Takase, Hiroshi)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号：60963204

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：ローレンツ多様体上のラプラス-ベルトラミ作用素を用いて記述される連立双曲型偏微分方程式に関する逆問題の研究を遂行した。この方程式に対し重み付きエネルギー評価であるカーレマン評価を確立し、観測データをコンパクトな境界付きローレンツ多様体の境界の一部でとったときの大域リプシッツ型安定性評価を証明した。さらに低階項に逆二乗の特異性がある係数をもつ空間一次元の波動方程式の波源項決定逆問題に対して大域リプシッツ型安定性評価を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

重力波を記述するような曲がった空間上における波動方程式の未知波源項を決定する逆問題に対し、安定性評価を証明した。これにより、境界における解の観測誤差が小さければ、未知の波源項同士の差も小さく、未知量が安定的に決定できることが分かる。

研究成果の概要（英文）：He studied an inverse problem for a system of hyperbolic partial differential equations written in terms of the Laplace-Beltrami operator on a Lorentzian manifold. He established a weighted energy estimate, the Carleman estimate, for this system and proved a global Lipschitz stability when the observation data is taken on a part of the boundary of the Lorentzian manifold. Furthermore, he proved a global Lipschitz stability for an inverse source problem of determining the source term of a one-dimensional wave equation with an inverse square potential.

研究分野：偏微分方程式の逆問題解析

キーワード：逆問題 非適切問題 偏微分方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ブラックホールや衝撃波といった特異性を有する物理現象に関する逆問題において、有限伝播性や退化性に焦点を当てることは重要であり、これは数理モデルとしては退化双曲型方程式の逆問題に対応する。その重要性から一意接続性定理が証明され、制御理論への応用も進められているが、逆問題に関しては方程式の退化性が未知量の特定に必要な観測データに及ぼす影響が解明されておらず、重要な研究課題として解決が待たれていた。

これまで、係数が時間にのみ依存する一階の退化双曲型方程式に対し重み付きエネルギー評価であるカーレマン評価を証明し、方程式の退化性と解の拡張可能性との関連を明らかにした。これは退化性が観測データに及ぼす影響を解明する第一歩ではあるものの、方程式の階数及び係数の時間依存性に強く依存した手法であるため、空間にも依存する係数を持つ方程式や二階の方程式には適用できず、これらの方程式に対する逆問題解析は依然として不十分であった。

そこで二階の退化双曲型方程式の逆問題理論を確立するべく、退化型作用素と共形変形した接束である0接束との関係に着目した。二階の退化双曲型作用素は非コンパクト多様体上の0接束によるラプラス-ベルトラミ作用素に対応するため、幾何解析を遂行することにより新たな逆問題理論を創出できると考えた。実際、通常の接束によるラプラス-ベルトラミ作用素に着目し非退化双曲型方程式に対する逆問題理論を確立した実績があり、本研究を遂行する上でも退化型作用素と0接束との関係に着目し非コンパクト多様体上において幾何解析を援用することは極めて有効であると見込まれた。

2. 研究の目的

非コンパクト多様体上の幾何解析を導入し退化双曲型方程式に対する波源項決定逆問題及び係数決定逆問題の一意性・安定性を証明することを第一の目的とする。多様体上の解析である幾何解析を導入することで安定性評価を得るための十分条件を幾何学的に記述し、特異性をもつ物理現象の逆問題を幾何学的不変量の観点から理解する。またこの十分条件が一意性の成立のためにどれほど必要なのか検証するべく、係数決定逆問題の一意性が破綻するような解と係数の組を構成することを第二の目的とする。

3. 研究の方法

二階の退化双曲型方程式に対し、本研究では二つの逆問題を考察した。

1. 波源項決定逆問題

未知波源項を境界における解の観測データから決定する逆問題である。直接は見えない内部の波源が引き起こす波動の境界における情報から、その未知の波源が特定できるかを解明する。

2. 係数決定逆問題

未知係数を境界における解の観測データから決定する逆問題である。境界で波の情報を得た観測者が、方程式で記述される現象の物理的な性質を特定することができるかを解明する。

研究の第一段階において、0接束の局所枠を用いてラプラス-ベルトラミ作用素が別の表現を持つことに着目し幾何解析を遂行することでカーレマン評価を確立した。第二段階においてカーレマン評価を上述の二つの逆問題に応用し、大域リプシッツ型安定性を証明した。

4 . 研究成果

学術論文

- [1] H. Takase. Global Lipschitz stability for inverse problems of wave equations on Lorentzian manifolds. *J. Differential Equations*, **372**, 564-590, 2023.

口頭発表

- [2] 高瀬裕志. Unique continuation for wave equations in asymptotically anti de Sitter spaces. 若手研究集会「波動・振動・流れの制御と逆問題 理論と数値計算」, 愛媛大学, 2022 年 11 月 .
- [3] H. Takase. Unique continuation for wave equations in asymptotically anti-de Sitter spaces, Workshop ``Recent advances in direct and inverse problems for PDEs and applications'', Sapienza Università di Roma, Italy, Dec. 5, 2022.
- [4] 高瀬裕志. 漸近的アンチドジッター空間における波動方程式の一意接続性. 九大幾何学セミナー, 九州大学, 2023 年 4 月.
- [5] H. Takase. Unique continuation for wave equations in asymptotically anti-de Sitter spaces. 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2023), Waseda University, Aug. 2023.
- [6] H. Takase. Lipschitz stability for inverse source problems of waves on Lorentzian manifolds. 11th Applied Inverse Problems Conference, Göttingen, Sept. 2023.
- [7] H. Takase. Global Lipschitz stability for inverse source problems of Lorentzian wave equations. Joint Fudan - RICAM Seminar on Inverse Problems, online, Nov. 2023.
- [8] H. Takase. Inverse source problems for wave equations with inverse square potentials. The 41th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, Kyushu University, Jan. 2024.
- [9] H. Takase. Inverse source problems for wave equations with inverse square potentials. 2024 Japan-Taiwan Joint Workshop on Numerical Analysis and Inverse Problems, Kyoto University, Mar. 2024.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Hiroshi Takase | 4. 巻 372 |
| 2. 論文標題 Global Lipschitz stability for inverse problems of wave equations on Lorentzian manifolds | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Differential Equations | 6. 最初と最後の頁 564 ~ 590 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2023.07.001 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件/うち国際学会 6件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 高瀬裕志 |
| 2. 発表標題 漸近的アンチドジッター空間における波動方程式の一意接続性 |
| 3. 学会等名 九大幾何学セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Unique continuation for wave equations in asymptotically anti-de Sitter spaces |
| 3. 学会等名 Congress on Industrial and Applied Mathematics（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Lipschitz stability for inverse source problems of waves on Lorentzian manifolds |
| 3. 学会等名 11th Applied Inverse Problems Conference（国際学会） |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Global Lipschitz stability for inverse source problems of Lorentzian wave equations |
| 3. 学会等名 Joint Fudan-RICAM Seminar on Inverse Problems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Inverse source problems for wave equations with inverse square potentials |
| 3. 学会等名 The 41th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2024年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Inverse source problems for wave equations with inverse square potentials |
| 3. 学会等名 2024 Japan-Taiwan Joint Workshop on Numerical Analysis and Inverse Problems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2024年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Unique continuation for wave equations in asymptotically anti-de Sitter spaces |
| 3. 学会等名 若手研究集会「波動・振動・流れの制御と逆問題-理論と数値計算-」(招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hiroshi Takase |
| 2. 発表標題 Unique continuation for wave equations in asymptotically anti-de Sitter spaces |
| 3. 学会等名 Recent advances in direct and inverse problems for PDEs and applications (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| Research map https://researchmap.jp/Hiroshi_Takase 九州大学研究者情報 https://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K008181/index.html |
|---|

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|---------------------------|-----------------------|----|
| 研究協力者 | (Florida Giuseppe) | | |
| 研究協力者 | (Choulli Mourad) | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|