

令和 6 年 5 月 7 日現在

機関番号：32606

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2022～2023

課題番号：22K20342

研究課題名（和文）スケイン代数とその応用

研究課題名（英文）Skein algebra and its applications

研究代表者

軽尾 浩晃（Karu, Hiroaki）

学習院大学・理学部・助教

研究者番号：80963363

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,900,000円

研究成果の概要（和文）：J. Korinman氏との共同研究では以下の結果を得た。(1) 指標多様体のZariski稠密開集合であるAzumaya集合を明確に与えた。応用として、非半単純位相的場の理論由来のTorelli群の射影表現を簡潔に再解釈することができた。(2) 懸案であった穴あき曲面に対するスケイン代数の有限次元表現を分類した。この分類のために、曲面の分解に関するAzumaya集合の分解公式を与えた。東北大学の石橋典氏との共同研究として、構造定数の正値性予想のスケイン代数的な解釈を与え、いくつかのマーク付き曲面に対して、構造定数を具体的に与えることで正値性予想を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Korinman氏との共同研究(1)はLe-Yuのサーベイにおける予想の反証になっており、インパクトがある。特に、非半単純位相的場の理論由来のスケイン代数の表現や量子6j記号を用いており、先行研究のアイデアや手法とは非常に異なっている。(2)では、量子団代数のAzumaya集合に関する結果の適用が証明の根幹になっており、低次元トポロジーに収まらない研究として意義がある。石橋典氏との共同研究について、構造定数の正値性予想のスケイン代数的な解釈の恩恵として、比較的簡単な曲面に対しては、スケイン代数の範疇で図式的かつ具体的に構造定数が理解できるというのが本研究の有用性である。

研究成果の概要（英文）：With J. Korinman, we gave the Azumaya loci of skein algebras explicitly. As an application, we had a simpler interpretation of projective representations coming from non-semi simple TQFT. In another project, we classified finite dimensional representations of reduced stated skein algebras using a decomposition formula of Azumaya loci.

With T. Ishibashi, we gave a skein interpretation of the positivity conjecture of structure constants for quantum duality maps and showed the conjecture with explicit structure constants.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：スケイン代数 指標多様体 量子団代数

1. 研究開始当初の背景

研究対象はスケイン代数であり、これは有向曲面に対して定まる代数である。Witten をはじめ、多く研究者によってその代数構造自体に興味を持たれている。スケイン代数は、(量子)団代数や飾り付き Teichmüller 空間と密接に関わっている。特に、団代数のみで考えていては証明できなかった現象が、スケイン代数を通して考えると見通しよく証明できることが多い。また、(飾り付き)Teichmüller 空間の量子化であることも示されている。このように、スケイン代数の恩恵・重要性は幾何の分野に収まらない。これらを踏まえて、スケイン代数の構造を理解し、その理解を通じた位相幾何学および関連分野の諸概念の再解釈によって研究の発展に寄与することは、分野の垣根を超えた重要な課題である。

2. 研究の目的

- (1) Azumaya 集合, シンプレクティック葉, 非半単純位相的場の理論などを用いて, 従来の研究と異なる視点から, スケイン代数の代数構造のより深い理解を目指す。
- (2) Teichmüller 空間の文脈において Fock--Goncharov の与えた双対写像の量子化をスケイン代数を用いて与え, 曲面の無限族に対して構造定数の正值性予想の肯定的解決を目指す。

3. 研究の方法

(1) に関しては, Julien Korinman 氏との研究打ち合わせに基づき成果を出した。

(2)に関しては, 石橋典氏との研究打ち合わせに基づき成果を出した。

どちらも, Zoom および対面で議論を行なった。

4. 研究成果

J. Korinman 氏との共同研究では以下の2つの結果を得た。

指標多様体の Zariski 稠密開集合である Azumaya 集合がどのような形をしているのかを明確にした。応用として, 非半単純位相的場の理論由来の Torelli 群の射影表現を簡潔に再解釈することができた。これは Le--Yu のサーベイにおける予想の反証になっており, インパクトがあると言える。特に, 非半単純位相的場の理論由来のスケイン代数の表現や量子 $6j$ 記号を用いており, 先行研究とは大きく異なるアイデアや手法に基づいている。この結果をプレプリント [KK1] としてまとめ, 現在投稿中である。

懸案であった穴あき曲面に対する被約状態付きスケイン代数の有限次元表現を分類した。この分類のために, 曲面の分解に関する Azumaya 集合の分解公式を与えた。Muller--Nguyen--Trampel--Yakimov の量子団代数の Azumaya 集合に関する結果を適用するというのが証明の根幹になっており, 低次元トポロジーに収まらない立ち位置の研究として意義がある。この結果をプレプリント [KK2] としてまとめ, 現在投稿中である。

東北大学の石橋典氏との共同研究として, 構造定数の正值性予想のスケイン代数的な解釈を与え, いくつかのマーク付き曲面に対して正值性予想を証明した。構造定数の正值性予想のスケイン代数的な解釈の恩恵として, 比較的簡単な曲面に対しては, スケイン代数の範疇で図式的かつ具体的に構造定数が理解できるというのが本研究の有用性である。特に, 我々の結果は Allegretti, Allegretti--Kim の結果の拡張になっており, 筋の良い拡張になっている。この結果をプレプリント [IK] としてまとめ, 現在投稿中である。

[KK2] Hiroaki Karuo and Julien Korinman,
Classification of semi-weight representations of reduced stated skein algebras,
arXiv:2303.09433 [math.QA]

[IK] Tsukasa Ishibashi and Hiroaki Karuo,
Quantum duality maps, skein algebras and their ensemble compatibility,
arXiv:2305.19074 [math.GT]

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 16件 / うち国際学会 7件）

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 境界付き3次元多様体のスケイン加群の有限性予想
3. 学会等名 佐賀創発数理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 On positivity of Roger--Yang skein algebras
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 On positivity of Roger--Yang skein algebras
3. 学会等名 Skein theory in Singapore（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 Classification of representations of skein algebras using quantum cluster algebras
3. 学会等名 Tohoku Cluster Seminar（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 skein代数の表現とAzumaya集合
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 Azumaya loci and skein algebras
3. 学会等名 Workshop on Quantum invariants and low-dimensional topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 Roger--Yangskein代数の正值性予想の提案
3. 学会等名 農工大・早大理工セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 Quantum duality maps, skein algebras and their ensemble compatibility
3. 学会等名 南大阪代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 Skein algebras and quantum Teichmuller spaces
3. 学会等名 The 14th MSJ-SI: New Aspects of Teichmuller theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 Quantum duality maps and skein algebras
3. 学会等名 Skein Algebra and related topics School and Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 スケイン代数とその周辺
3. 学会等名 N-KOOKセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 スケイン代数と正值性予想
3. 学会等名 佐賀大学・学習院大学合同トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 The reduced Dijkgraaf--Witten invariant of knots in the Bloch group of a finite field
3. 学会等名 Gauge Fields in Arithmetic, Topology & Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 軽尾 浩晃
2. 発表標題 スケイン代数とその周辺
3. 学会等名 学習院大学・数学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 LRY skein algebras and Chekhov--Fock algebras
3. 学会等名 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroaki Karuo
2. 発表標題 Quantum trace maps for LRY skein algebras
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------