

# 科学研究費助成事業(基盤研究(S))公表用資料 [研究進捗評価用]

平成23年度採択分  
平成26年2月13日現在

## ホモロジー的ミラー対称性の証明 Proof of Homological Mirror symmetry

深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)

京都大学・大学院理学研究科・客員教授



研究の概要：シンプレクティック幾何学と複素幾何学との対称性を予想する、ホモロジー的ミラー対称性を研究している。そのシンプレクティック幾何学側の中心である、フレアーホモロジーの基礎付けをより明確にすると同時に、トーリック多様体とランダウギンズブルグモデル、族のフレアーホモロジーの両面から、証明を追求している。一般化や応用も行っている。

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学、位相幾何学、複素多様体、代数幾何学

### 1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性予想は、超弦理論でたてられた予想である。

それは、たとえば、キャラビ-ヤウ多様体のなかの有理曲線の数を予想する。

この部分については、多くの場合に、この予想は数学的に証明されているが、これが成立する理由が、明確に把握されるような、証明にはなっていない。

ホモロジー的ミラー対称性予想は、ミラー対称性予想を2つのカテゴリーの同等性として定式化するもので、予想成立する内在的意味を明らかにするものである。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、ホモロジー的ミラー対称性を、種々の場合に証明するとともに、予想を定式化する背景となるラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーやそれに基づく深谷圏の理論の基礎付けを整備し、また、ホモロジー的ミラー対称性予想の、シンプレクティック幾何学などへの応用も行うものである。

### 3. 研究の方法

ミラー対称性予想の証明には、大まかにいって、2つのやり方が提唱されている。

一つは、まず、トーリック多様体の場合を確立し、キャラビヤウ多様体の場合にはその部分多様体として、証明するものである。

もう一つは、族のフレアーホモロジーを用いるものである。本研究ではその両者の立場から証明を試みる。

### 4. これまでの成果

ホモロジー的ミラー対称性予想の定式化に不可欠であった、ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーやそれに基づく深谷圏の理論の基礎付けは、2009年に発表された、深谷-オウ-太田-小野の書物で確立された。

そこで用いられた主要な手法である、仮想ホモロジー類および仮想ホモロジーチェーンの方法は、1999年に発表された、深谷-小野の論文に始まり、上記2009年の書物でより深められた。

本研究が開始されてから、シンプレクティック幾何学における擬正則曲線の理論の基礎に関する関心が高まり、それに伴って上記仮想ホモロジーチェーンの方法や、その深谷小野によるやり方である、倉西構造と多価摂動による方法に対する関心も高まっている。倉西構造や多価摂動の理論をより詳細に述べ、その結論をより正確に定式化することが求められている。

そのような研究を行う事で、我々の方法に対する、各国の研究者の理解を高めることができる。

また、本研究の目的である、ホモロジー的ミラー対称性の証明においても倉西構造や多価摂動の理論を、高度なやり方で用いる必要があるため、その基礎、摘要範囲をより明確に確立し、ここの摘要場面でそれぞれ定式化し証明するのではなく、一般論として、応用しやすいように確立しておくことが望ましい。

このような理由で、研究の進行の順番を多少変更し、最初の数年間においては、倉西構造と多価摂動による方法にもとづき、仮想ホモロジー類の理論の詳細を、記述することに多くの時間を費やした。

昨年は、そのため、250ページ程度の文献を制作し、論文サーバー上で発表した。これは特に、擬正則曲線のモジュライ空間上の倉西構造の構成の基礎となる、貼り合わせについての解析的な細部を含んでおり、上記深谷小野の研究以後、多くの研究者から要望のあった、倉西構造の座標変換が無限階微分可能であることの、詳細な証明を含むものである。本年度は、さらに、倉西構造のファイバー積、倉西構造を持つ空間でのドラムホモロジー論、倉西構造を持つ空間のシステムの公理的定式化と、それに基づくフレアーホモロジー論の記述、ファイバー積と整合的な倉西構造のシステムの構成、などを含む、500ページ程度の文献を制作している。

ホモロジー的ミラー対称性の研究そのものも進展している。特に最近数年間の研究によって、次のような進展があった。

1) ホモロジー的ミラー対称性を、高い種数のリーマン面（境界付きも含む）からの写像の情報を含むように一般化する上での進展があった。

2) トーリック多様体の場合のミラー対称性では、ランダウ-ギンズブルグモデル、あるいは、斎藤恭司の原始形式の理論が複素側で現れる。深谷らのトーリック多様体のミラー対称性研究では、ヤコビ環と量子コホモロジー環との環同型や、Residue pairing とポアンカレ双対の関係などが明らかにされていたが、より進んで、higher Residue pairing, good section, 原始形式を深谷圏と関わって理解することが可能になりつつある。

これは、深谷圏のホッホシルドホモロジーや巡回ホモロジーを用いるもので、非可換ホッジ理論とよばれるものと、関係が深い。

3) 仮想ホモロジーチェーンに対する理解の深まりによって、定数写像を擬正則曲線と見なしたとき、その仮想ホモロジーチェーンを使って代数構造を構成することが可能になりつつあるが、この構成と、チャーンスイモンズ摂動理論や、繰り込み理論との関係が次第に明らかになりつつあり、ホモロジー的ミラー対称性の定式化や背景となっていた、倉西構造を持つ空間でのドラムホモロジー論、ホモトピー極限を用いた、ホモトピー無限的代数構造の構成などが、場の量子論など、より広い数学、物理学の諸分野と関わりをもつことが、明らかに成りつつある。

これらの進展については、研究集会で発表などを行っているが、その詳細については、前記の基礎付けに関わる文献の制作との関係などで、執筆が遅れていて、まだ証明が詳細に書かれているわけではない。

## 5. 今後の計画

4で述べた基礎付けについては、さらに、忘却写像の組織的な研究とそれに基づく、グロモフウィッテン理論やラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジーの基本性質の詳細な証明などを含む文献の制作を続ける予定であり、さらにその全体をまとめて、書物などの形で再編集し、出版する予定である。

また、同変倉西構造の理論などについても、詳細を執筆発表の予定である。

この執筆を進展させることで、予定していたホモロジー的ミラー対称性の種々の場合の証明の詳細な記述、また、4で述べた種々の進展に関する論文の執筆などが可能になる。

6. これまでの発表論文等（受賞等も含む）  
受賞：深谷は、2012年の藤原賞を受賞した。中島は2013年度の日本学士院賞を受賞した。  
論文など：Fukaya, Kenji; Oh, Yong-Geun; Ohta, Hiroshi; Technical details on Kuranishi structure and virtual fundamental chain, arXiv:1209.4410.  
Fukaya, Kenji; Oh, Yong-Geun; Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru, Lagrangian Floer theory overintegers: Spherically Positive Symplectic Manifolds. Pure and Applied Mathematics Quarterly, 9-2 (2013) 189-289.

T. Kato: Automata in groups and dynamics and induced systems of PDE in tropical geometry, Journal of Geometric Analysis, on line first (87 pages) 10.1007/s12220-012-9360-y

H. Ma and Y. Ohnita: Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. Part I, to appear in Journal of Differential Geometry.

Fukaya, Kenji; Oh, Yong-Geun; Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru, Toric degeneration and nondisplaceable Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$ . Int. Math. Res. Not. IMRN 2012, no. 13, 2942-2993.

J. Byszewski, G. Cornelissen, F. Kato: “Un anneau de deformation universel en conducteur supérieur”, Proc. Japan. Acad. Ser. A Math. Sci. 88, no. 2, 25-27 (2012)  
Hiroshi Iritani, “Quantum Cohomology and Periods”, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 61 (2011), no. 7, 2909-2958

Fukaya, Kenji; Oh, Yong-Geun; Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey, Surveys in Differential Geometry XVII (2012) 229-298

ホームページ等

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/fukaya-j.html>