

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2011～2014

課題番号：23244003

研究課題名(和文)多様な手法による多変数保型形式の数論的研究

研究課題名(英文)Arithmetic study of automorphic forms of many variables by various method

研究代表者

織田 孝幸(Oda, Takayuki)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：10109415

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 23,700,000円

研究成果の概要(和文): Lie群 $GL(n, R)$, $Sp(2, R)$, $SU(3, 1)$ の標準的な表現のWhittaker関数や、球関数の動径成分の明示的な積分表示や級数展開表示など基本的な結果を得た: $GL(n, R)$ のクラス1でない主系列Whittaker関数の明示公式は1980年代のBumpなどの30年の研究史に一応のピリオドを打ち今後は応用が期待できる(成蹊大・石井卓と共同研究)。SU(2, 1), $SU(3, 1)$ の離散系列表現の明示公式(山形大・早田孝博、三重大・古関春隆、北里大・宮崎直などとの共同研究)。種数2のSiegelモジュラー群の基本領域のcell分解に関連する研究上の予想を一つ解決(早田との共同研究)。

研究成果の概要(英文): We obtained some fundamental results on the integral expressions and power series expressions of the A-radial parts of either Whittaker functions or spherical functions for the standard representations (i.e principal series and/or discrete series representations) of the Lie groups, $GL(n, R)$, $Sp(2, R)$ and $SU(3, 1)$. The formulas of Whittaker functions of non-spherical principal series put a period on the research history beginning from the studies of D. Bump and others, and we can expect various applications of this result (this is a joint works with Taku Ishii of Seikei Univ.). We obtained an explicit formulas of the matrix coefficients of the large discrete series of the Lie groups $SU(2, 1)$, $SU(3, 1)$ (joint work with T. Hayata, H. Koseki, and T. Miyazaki). This result gives a suggestion for study of the reproducing kernels. We push forward the investigation on the cell-decomposition of Siegel-Gottschling fundamental domain of genus 2 (the first paper was a joint paper with T. Hayata).

研究分野: Number Theory

キーワード: Automorphic forms spherical functions Green functions Whittaker function modular forms

1. 研究開始当初の背景 これまで、1990年代前半より、多変数保型形式の実解析的な基礎を確立するために、特に Shimura 多様体と関連する半単純 Lie 群 G で極大コンパクト群 K による商 G/K が Hermite 対称空間の場合で、特に G の離散系列の表現の場合に、いろいろな明示公式を求めてきた。これは、さらにさかのぼると、Shimura 多様体の上の幾何学的な起源をもつ局所係数系に値をもつコホモロジー群の Hodge 構造を調べたいという、申請者の博士論文以来の強い動機づけに基づく。この種の Vision は、80年代中ごろには明確になったが、それらを具体化する実解析学の研究上のスキルが当時の申請者にはなかった。それが(そのスキルが)、山下博氏の博士論文にあることが分ったのが、一連の研究の開始である。最初は $Sp(2, \mathbb{R})$ や $SU(2, 2)$ などの群の大きな離散系列表現の Whittaker 関数の研究から手を付け、手法の一般性を理解する過程で、他の群に少しずつ手を伸ばしてきた。ただ、我々の関心は幾何学的な構造にあるので、実解析学の成果のみでは不十分である。もちろん、多変数の超幾何関数が登場する多くの明示公式を得ることは、それなりに意味のあることと信じているが、さて、幾何学的な方向の関心として Shimura 多様体のホモロジー類をどうやって構成し、調べるかという問題がある。::: これをより自由に幾何的な構成や、保型的 L-関数の研究に結びつけるためには、これまで得たアイデアを統合して新たな結果を得ることが、必要になった。また $SL(n, \mathbb{R})$ のような特別な群の場合には、これまでの研究史に終止符を打つ研究が進行中であったが、これを完成させる必要もあった。幾何的な背景としては、Shimura 多様体のホモロジー理論を展開する方向として、まずは種数 2 の Siegel モジュラー群の基本領域の幾何学的性質を調べる方向を一つ。もう一つは、モジュラー多様体の部分多様体の Green current を調べる、もう一つの方向を構想していた。
2. 研究の目的 上記の背景で述べた経緯で課題となった懸案を解決する。具体的には、石井卓氏との長い期間にわたる共同研究であった、 $SL(n, \mathbb{R})$ の non-spherical 主系列表現の Whittaker 関数の明示公式の研究の完成と、さらにその応用を目指す。また Siegel - Gottschling の基本領域の研究で、境界にでてくる部分多様体の、微分幾何学的な性質

などを調べる。さらに上智大学の都築正男氏との共同研究であった、Green currents の構成の研究をさらに進展させることも目標であった。

3. 研究の方法 数学の研究であるから、より現代的な手法・知識で問題解決に当たる、としか言えないが、敢えてもう少し、技術的な説明をすると、石井氏との共著論文では、Whittaker 関数の A-動径成分の満たす、ベクトル値の偏微分方程式系(ホロノミック系)が、 $n-1$ 次のとくと n 次のとくに、帰納的な関係があり、これに注目して、第 2 種 Whittaker 関数と呼ばれるものの展開係数の間にも帰納的な関係があることが分る。一般に高い階数の Lie 群上の球関数を明示的に調べる研究は、時間もかかるし技術的にも難しい。現在このような研究をやっているのは、ベクトル値の場合は、代表者・織田の元学生を除けば、青山学院大学の谷口健二氏、あとはときどき代表者の共著者にもなる、城西大学の飯田正敏氏くらいしか思いつかない。ベクトル値の球関数の満たす偏微分方程式系をきちんと決定するためには、Dirac 作用素の固有値を決定する必要がある。これは、これまで織田とその共著者の論文に提示されている重要な点であり、新しいアイデアである。これなしでは、ベクトル値の球関数の満たすホロノミック系は決まらない。さて構成された球関数からは、例外なしに Poincare' 級数が定義されるか、これらはうまく解析接続できると、興味深い保型形式を与える。つまり新たな研究対象を生み出す。これらが幾何学的により興味ある対象のは、元の球関数がベクトル値のときである。

4. 研究成果 石井氏との共著論文は、Journal of Functional Analysis に出版された。これの応用は、大きな課題であるが、現在、Colorado 大学の Eric Stade 教授などと検討中である。我々の結果は、Alexander Givental 氏の Mirror 対称性の予想にも関連するようであるが、数理論理の人たちは、厳密な証明に対する関心が薄いようである。早田孝博氏(山形大学)、古関春隆氏(三重大学)、宮崎直氏(北里大学)の 3 氏との共著論文 $SU(3, 1)$ の大きな離散系列表現の行列係数の明示公式を得て共著論文とし、これは、Journal of Lie Theory に出版される。基本領域関連の研究は、半世紀以上前の、Gottschling (Siegel の弟子)の研究に新たな光を当てることになっている。まず基本領域の壁(実 5 次元の cell が 28 個ある)の交差で決ま

る stratification を調べようとした。手始めに 0 次元の cell を数え尽くそうとした。これは 180 個の点からなることが (最初はある仮定付きの予想として、最後は改定なしの) 定理として証明された (早田 織田の共著論文、2012)。この後、細々した話はあるが、一つの事例研究として、基本領域の壁の交差の実例として出てくる cell の実例を微分幾何学的な見地から調べたものを、アラビアの Oman の研究集会の記録に出版した。この研究では最初の論文の共著者の早田孝博氏との共同研究は継続中である。最後に、權寧魯氏 (九州大学) との共著論文で、 $Sp(2, R)$ の大きな離散系列の Siegel-Whittaker 関数の積分公式を新たに得た。これは、宮崎琢也氏 (慶応大学) のこれまでの積分表示を改良するものである。被積分関数が、より超越性の少ないものになった。研究計画などにおいて、実現していないものに、複素超球の算術商の 2 点に対する Green currents の構成という課題がある。これは、昨年の夏の玉原セミナーハウスでのミニ集会で、古関・早田・宮崎直・代表者の最近の共著論文の延長に理論構築できる展望が共有された。これを完成させる詳細な検討は、今後の課題であるが、当研究費で、具体的な展望が得られたことを報告に記載し、今後の励みにしたい。連携研究者の海外渡航へのサポートの主なものは次のようなものである：広中由美子 (早稲田大学) は 2012 年 4 月 21 日から 5 月 3 日まで、Yale 大学数学科で 4 月 23 日から 27 日まで開かれた研究集会「automorphic forms 2012」"Automorphic forms and related geometry" に参加し 4 月 30 日に Yale 大学の数学教室の数論セミナーで発表した：(題目：Spherical functions on the space of p -adic unitary hermitian matrices)；また金沢大学の若槻聡は、2014 年 4 月 27 日から 5 月 3 日にかけて行われたドイツの Oberwolfach での研究集会「Modular Forms」に参加した。オーガナイザーは Bruinier、市野、池田、Imamoglu の 4 名である。集会の主な主題は、保型 L 関数の特殊値と保型形式のフーリエ係数に関係するものが中心であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

T. Hayata, H. Koseki, T. Miyazaki, T. Oda: Matrix Coefficients of Discrete Series Representations of $SU(3,1)$. Journal of Lie Theory, Vol 25 (2015), no. 1, 271—306.

Ishii, Taku; Oda, Takayuki: Calculus of principal series Whittaker functions on $SL(n, R)$. J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 3, 1286–1372.

Oda Takayuki : Matrix coefficients of the large discrete series representations of $Sp(2; R)$ as hypergeometric series of two variables. Nagoya Math. J. 208 (2012), 201–263.

Hayata, Takahiro; Oda, Takayuki; Yatougo, Tomoki :

Zero cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2. Exp. Math. 21 (2012), no. 3, 266–279.

Oda, Takayuki

Cohomology of Siegel modular varieties of genus 2 and corresponding automorphic forms. In “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables”, 211–253, Ser. Number Theory Appl., 7, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[学会発表](計 2 件：代表者の国外のものに限る)

Takayuki Oda “Cell decomposition of the fundamental domain of the Siegel modular group of genus two” and an application of the language “Ruby”, International Workshop “New development in Modern Number Theory and Applied Mathematics and Special contribution of students and E-learning”, Muscat, Sultanate Oman, February, 2012

Takayuki Oda “Zero cells of the Siegel-Gottschling fundamental domains of degree 2”. The International Conference “Polynomial Computer Algebra”, Euler International Mathematical Institute Sait-Peterburg, Russia April, 2011.

[その他] 特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

織田孝幸 (ODA Takayuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：10109415

(3) 連携研究者

広中由美子 (HIRONAKA Yumiko)

早稲田大学・教育学部・教授

研究者番号：10153652
若槻 聡 (WAKATSUKI Satoshi)
金沢大学・数物系・准教授
研究者番号：10432121
古関春隆 (KOSEKI Harutaka)
三重大学・教育学部・教授
研究者番号：60234770
早田孝博 (HAYATA Takahiro)
山形大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：50312757
都築 正男 (TSUZUKI Masao)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号：80296946
平野 幹 (HIRANO Miki)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：80314946
権 寧魯 (GON Yasuro)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：30302508
石井 卓 (ISHI Taku)
成蹊大学・理工学部・准教授
研究者番号：60406650