

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340017

研究課題名(和文) 解析的捩率と幾何学

研究課題名(英文) Analytic torsion and geometry

研究代表者

吉川 謙一 (Yoshikawa, Ken-Ichi)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20242810

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,000,000円

研究成果の概要(和文)：対合付きK3曲面の同変解析的捩率から得られる不変量を研究し、その不変量をモジュライ空間上の関数として決定した。特に、対合付きK3曲面の解析的捩率不変量が常にBorcherds積と固定曲線のテータ定数の積として表示される事が明らかになった。また、3次元Calabi-Yau多様体のBCOV不変量を研究し、Borcea-Voisin多様体のBCOV不変量を決定した。3次元Calabi-Yau軌道体のBCOV不変量を導入し、Borcea-Voisin軌道体の場合にクレパント解消のBCOV不変量との一致を示した。解析的捩率の研究とは別に、Borcherds ϕ -関数の代数的表示を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied the holomorphic torsion invariant of 2-elementary K3 surfaces and we determined its explicit formula as a function on the moduli space. It turned out that, for all topological types of involutions, the holomorphic torsion invariant is expressed as the product of an explicit Borcherds product and theta constants.

We also studied the BCOV invariant of Calabi-Yau threefolds and we determined its explicit formula as a function on the moduli space for Borcea-Voisin threefolds. We introduced BCOV invariants for Calabi-Yau orbifolds and made comparison of BCOV invariants between Borcea-Voisin orbifolds and their crepant resolution.

We studied the Borcherds ϕ -function and obtained its algebraic expression. Namely, the value of the Borcherds ϕ -function at the period of an Enriques surface is expressed as the product of its period and the resultant of its defining equation. As a by-product, we obtained an infinite product expression of theta constants of genus 2.

研究分野：複素幾何学

キーワード：解析的捩率 保型形式 モジュライ空間 K3曲面 Calabi-Yau多様体 BCOV不変量 Borcherds積

1. 研究開始当初の背景

(1) 弦理論における双対性に触発され、2004年に報告者は解析的振率を用いて対合付き K3 曲面の不変量 τ_M を構成し、さらにその不変量が定めるモジュライ空間上の関数の保型性を示した。この解析的振率不変量の明示公式は数例を除いて知られておらず、知られている場合には全て Borcherds 積を用いて書けていた。このため、一般の場合の解析的振率不変量の明示公式を求めることは重要な問題であった。

(2) 種数 1 ミラー対称性に関連して、3次元 Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量の大複素構造極限における標準座標での表示に興味を持たれていた。特に、BCOV 不変量が Borcherds 型無限積表示を持つ事が種数 1 ミラー対称性の結論に含まれ、そのため BCOV 不変量の構造に注目が集まっていた。これまで、報告者と共同研究者によりミラー 5 次超曲面と例外型 Borcea-Voisin 多様体の場合に、BCOV 不変量がモジュライ空間上の関数として決定されていた。それ以外の 3次元 Calabi-Yau 多様体の変形族で BCOV 不変量が決定されているものは存在しておらず、BCOV 不変量を具体的に計算することは重要な問題であった。

(3) Borcherds Φ -関数の代数的表示

1次元の保型形式である Dedekind η -関数に対して、三種類の異なる理解が古典的に知られている。一つは Fourier 展開・無限積展開による保型形式としての定義であり、一つは楕円曲線の判別式としての理解であり、最後の一つは平坦楕円曲線の解析的振率としての理解である。Borcherds Φ -関数は Enriques 曲面のモジュライ空間上の零点を持たない保型形式であるため、楕円曲線と Dedekind η -関数の間に成り立つ関係と同様の関係が Enriques 曲面と Borcherds Φ -関数の間に期待されていた。Borcherds Φ -関数の解析的振率としての理解は報告者により知られていたため、Borcherds Φ -関数の代数幾何学的構成が問題として残されていた。この様な代数幾何学的構成は Borcherds Φ -関数の値に対する幾何学的理解を進展させる上でも重要である。

2. 研究の目的

(1) 対合付き K3 曲面の不変量 τ_M および対応する保型形式 Φ_M のモジュライ空間上の関数としての構造を決定する。これまで計算されている例では全て τ_M および Φ_M は IV 型領域上の保型形式と Siegel 保型形式の積に分解されているので、この様な分解を全ての対合に対して確立する。

(2) モジュライ空間の構造が簡単な Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量を決定する。特に、モジュライ空間が有界対称領域の算術商になる Calabi-Yau 多様体に対して、BCOV 不変量がモジュライ空間上の保型形式の Petersson ノルムで書けることを示す。

(3) Enriques 曲面の適当な射影モデルを用いて Borcherds Φ -関数を代数幾何的に構成し、それを CM サイクルにおける値等の特殊値の計算に応用する。

3. 研究の方法

(1) 固定曲線のテータ定数を Torelli 写像により対合付き K3 曲面のモジュライ空間に引き戻して得られる保型形式の零因子を決定する事により、 Φ_M とテータ定数から定まる IV 型領域上の保型形式の因子を決定する。この因子が Heegner 因子であることを示し、対応する Borcherds 積を決定する。この様にして、 Φ_M の構造と因数分解を決定する。

(2) BCOV 不変量の充たす曲率公式において、モジュライ空間の境界因子からの寄与を決定し、コンパクト化されたモジュライ空間上で BCOV 不変量の充たす微分方程式を決定する。特に、3次元 Calabi-Yau 多様体の半安定退化族の場合に、BCOV 不変量の退化を特異ファイバーから定まる種々の特性類により書き下す。

(3) Enriques 曲面の射影モデルとして 5次元射影空間の (2, 2, 2) 型完全交叉の対合による商としての表示を考え、この表示を用いて代数的に普遍被覆 K3 曲面上の多重標準形式を構成し、その周期として Borcherds Φ -関数の値を実現する。

4. 研究成果

(1) 対合付き K3 曲面の不変量 τ_M および対応する保型形式 Φ_M の構造を、普遍定数を除き決定した。結果的に、 τ_M は或る一列の Borcherds 積、及び対合の固定曲線が定める非零テータ定数全部の積として常に表されることがわかった。対合の位相型を表す双曲型格子の階数が 11 以上の場合、この結果は論文②として出版され、一般の場合は馬昭平との共同研究において解決され、プレプリントが arXiv:1506.00437 に公開されている。また、日本語による解説が⑤において与えられている。この研究は現在も継続中であり、純粋に Borcherds 積だけを与える解析的振率不変量の構成と、固定曲線の周期への応用が見込まれる。

(2) 3次元 Calabi-Yau 多様体の半安定退化族に対し、BCOV 不変量の退化を決定した。また、BCOV 不変量の特異性の適当な条件下での局所性を示し、特に通常二重点のみを特異点として持つ Calabi-Yau 多様体への退化の場合に、BCOV 不変量の特異性を決定した。この結果は論文④として出版され、また論文⑥の技術的基礎を与える。

(3) モジュライ空間が有界対称領域の算術商になる Calabi-Yau 多様体の典型例として、Borcea-Voisin 多様体がある。上記(2)の応用として、例外型とは限らない一般の Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量を決定し、それが Borcherds 積とテータ定数及び Dedekind η -関数の積として表されること

を示した. この研究結果は論文⑥として発表予定である.

(4) 3次元 Calabi-Yau 軌道体の BCOV 不変量を定義し, 大域的軌道体の場合に曲率公式を示し, Borcea-Voisin 軌道体の場合に BCOV 不変量の明示公式を得た. この結果の観察から, クレパント特異点解消により BCOV 不変量が普遍定数を除き不変であるという予想を提示した. この研究結果は論文⑥として発表予定である.

(5) Enriques 曲面の射影モデルとして 5次元射影空間の $(2, 2, 2)$ 型完全交叉 K3 曲面の対合による商としての表示を考え, この表示のポアンカレ留数と終結式を用いて普遍被覆 K3 曲面上に Borchers Φ -関数と等価な多重標準形式をに構成した. また, その周期として Borchers Φ -関数の値を実現した. 予想せぬ副産物として, 種数 2 のテータ定数が Borchers 積として表示されることがわかった. この研究は川口周と向井茂との共同研究であり, プレプリントが arXiv:1308:6454 として公開されている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

- ① Ken-Ichi Yoshikawa, *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III: the case $r(M) \geq 18$* , *Mathematische Zeitschrift* **272** (2012), 175–190, 査読有 DOI 10.1007/s00209-011-0928-1
- ② Ken-Ichi Yoshikawa, *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II: a structure theorem for $r(M) > 10$* , *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **677** (2013), 15–70, 査読有 DOI 10.1515/crelle.2012.009
- ③ Ken-Ichi Yoshikawa, *A trinity of the Borchers Φ -function*, *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **40** (2013), 575–597, 査読有 DOI 10.1007/978-1-4471-4863-0_25
- ④ Ken-Ichi Yoshikawa, *Degenerations of Calabi-Yau threefolds and BCOV invariants*, *International Journal of Mathematics* **26** (2015) 1540010(33 pages), 査読有 DOI: 10.1142/S0129167X15400108
- ⑤ 吉川謙一, 対合付き K3 曲面と解析的捩率, *数学* **68** (2016) (掲載予定) 査読有
- ⑥ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for Borcea-Voisin threefolds*, *The Jean-Michel Bismut 65th Anniversary Volume*, Birkhauser (掲載予定), 査読有
- ⑦ Shu Kawaguchi, *Inverse degree of an affine space triangular automorphism*,

Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2013), 3353–3360, 査読有 DOI:

<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11631-X>

⑧ Shu Kawaguchi, *Local and global canonical height functions for affine space regular automorphisms*, *Algebra & Number Theory* **7** (2013), 1125–1252, 査読有 DOI: 10.2140/ant.2013.7.1225

⑨ Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, *Michigan Mathematical Journal* **63** (2014), 41–63, 査読有 doi:10.1307/mmj/1395234358

⑩ Shu Kawaguchi, *Nilpotency indeces, degrees of iterations of affine triangular automorphisms, and Schubert calculus*, *Manuscripta Mathematica* **144** (2014), 311–339, 査読有 DOI: 10.1007/s00229-014-0658

⑪ Shu Kawaguchi, Kazuhiko Yamaki, *Rank of divisors on hyperelliptic curves and graphs under specialization*, *International Mathematical Research Notices IMRN* (2015), 4121–4176, 査読有 doi:10.1093/imrn/rnu059

⑫ Manfred Lehn, Yoshinori Namikawa, Christoph Sorger, *Slodowy slices and universal Poisson deformations*, *Compositio Math.* **148** (2012), 121–144, 査読有 DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X11005550>

⑬ Yoshinori Namikawa, *On the structure of homogeneous symplectic varieties of complete intersection*, *Inventiones Mathematicae* **193** (2013), 159–185, 査読有 DOI: 10.1007/s00222-012-0424-1

⑭ Yoshinori Namikawa, *Equivalence of symplectic singularities*, *Kyoto Journal of Mathematics* **53** (2013), 483–514, 査読有 doi:10.1215/21562261-2081270

⑮ Yoshinori Namikawa, *Poisson deformations and birational geometry*, *Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo* **22** (2015), 339–359, 査読有

⑯ Shigeru Mukai, *Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces*, *Journal of the Mathematical Society of Japan* **64** (2012), 231–246, 査読有 doi:10.2969/jmsj/06410231

⑰ Shigeru Mukai, *Counterexamples to Kodaira's vanishing and Yau's inequality in positive characteristics*, *Kyoto Journal of Mathematics* **53** (2013),

515-532, 査読有

doi:10.1215/21562261-2081279

⑱ Atsushi Moriwaki, *Arithmetic linear series with base conditions*, *Mathematische Zeitschrift* **272** (2012), 1383-1401, 査読有

DOI: 10.1007/s00209-012-0991-2

⑲ Atsushi Moriwaki, *Toward Dirichlet's unit theorem on arithmetic varieties*, *Kyoto Journal of Mathematics* **53** (2013), 197-259, 査読有

doi:10.1215/21562261-1966116

⑳ Atsushi Moriwaki, *Numerical characterization of nef arithmetic divisors on arithmetic surfaces*, *Annales de la Faculte des sciences de Toulouse Mathematiques* **23** (2014), 717-753, 査読有
doi: 10.5802/afst.1422

㉑ Atsushi Moriwaki, *Semiample invertible sheaves with semipositive continuous hermitian metrics*, *Algebra & Number Theory* **9** (2015), 503-509, 査読有

DOI: 10.2140/ant.2015.9.503

[学会発表] (計 20 件)

① Ken-Ichi Yoshikawa, *Singularities and analytic torsion*, *Kyoto Symposium on Complex Analysis in Several Variables XIV*, Kyoto University, Japan (2011年7月22日)

② Ken-Ichi Yoshikawa, *Resultants and Borcherds Φ -function*, *Infinite Analysis 11*, University of Tokyo, Japan (2011年7月28日)

③ Ken-Ichi Yoshikawa, *On the value of Borcherds Φ -function*, *Workshop on Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds*, The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, Canada (2011年8月18日)

④ Ken-Ichi Yoshikawa, *On the value of Borcherds Φ -function*, *Kyoto-Paris-Barcelona Seminar in Arakelov Geometry*, Institut de Mathematiques de la Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain (2011年9月8日)

⑤ Ken-Ichi Yoshikawa, *Resultants and Borcherds Φ -function*, *Automorphic forms and moduli spaces*, Centre International de Rencontres Mathematiques, Luminy, France (2011年10月11日)

⑥ 吉川 謙一, *解析的振率とBCOV予想*, 日本数学会企画特別講演, 東京理科大学 (2012年3月28日)

⑦ Ken-Ichi Yoshikawa, *A trinity of Borcherds Φ -function*, *Analytic torsion and its application*, Universite Paris-Sud, Orsay, France (2012年6月20日)

⑧ Ken-Ichi Yoshikawa, *Singularities and analytic torsion*, *Workshop "Spectral*

Invariants on Non-compact and Singular Spaces", Centre de Recherches Mathematiques, Montreal, Canada (2012年7月27日)

⑨ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion of log-Enriques surfaces*, *Algebraic geometry, modular forms and applications to physics*, International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK (2012年11月27日)

⑩ Ken-Ichi Yoshikawa, *Resultants and Borcherds Φ -function*, *Complex Geometry Conference*, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea (2013年5月7日)

⑪ Ken-Ichi Yoshikawa, *Equivariant analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *Control, index, traces and determinants*, Universite Paris-Sud, Orsay, France (2013年5月27日)

⑫ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion and mirror symmetry*, *Paris-Kyoto-Barcelona Seminar in Arakelov Geometry*, Institut de Mathematiques de Jussieu, Paris, France (2013年9月25日)

⑬ Ken-Ichi Yoshikawa, *Equivariant analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and Enriques surfaces*, Universite Lille 1, Lille, France (2014年3月26日)

⑭ Ken-Ichi Yoshikawa, *BCOV invariant for Calabi-Yau threefolds*, *New Developments in Algebraic Geometry*, National Taiwan University, Taiwan (2014年9月2日)

⑮ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *Modular Forms and Geometry of Modular Varieties*, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil (2015年5月5日)

⑯ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *2015 ECNU Workshop on Geometry and Analysis on Manifolds*, East China Normal University, Shanghai, China (2015年7月22日)

⑰ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *Trends in Modern Geometry & 10th Pacific Rim Complex Geometry Conference*, Nasu, Japan (2015年7月31日)

⑱ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *Intercity Seminar on Arakelov Geometry*, Kyoto, Japan (2015年9月4日)

⑲ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*, *2015 Taipei Conference on Complex Geometry*, Academia Sinica, Taiwan (2015年12月20日)

⑳ Ken-Ichi Yoshikawa, *Analytic torsion for K3 surfaces with involution*,

Arithmetic and Algebraic Geometry 2016,
University of Tokyo, Japan (2016年1月
28日)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等：なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉川 謙一 (YOSHIKAWA, Kenichi)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20242810

(2) 研究分担者

松澤 淳一 (MATSUZAWA, Junichi)
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：00212217

(3) 連携研究者

川口 周 (KAWAGUCHI, Shu)
同志社大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：20324600

並河 良典 (NAMIKAWA, Yoshinori)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80228080

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：80115641

森脇 淳 (MORIWAKI, Atsushi)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70191062