

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23340025

研究課題名(和文)フラクタルの内的構造を巡る数学の諸分野の相互作用

研究課題名(英文)Interaction between areas of Mathematics related to internal structures of fractals

研究代表者

木上 淳(Kigami, Jun)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：90202035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,300,000円、(間接経費) 4,290,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては、フラクタル集合を、その構造に注目し、解析学・幾何学・代数学にわたる広い視点から考察した。特に、フラクタル的な構造をもつ物体の上の波や熱伝導などの物理現象の数学的モデルとして、フラクタル上の確率過程論・ポテンシャル論について、例えば熱の時間的広がりや空間的広がりが分かるための一般的な条件を明らかにした。さらに、空間に無限個の穴がある場合の、平衡状態での熱の分布に関して、その解析的な性質を考察し、熱分布が滑らかであるための条件を得た。

研究成果の概要(英文)：In this project, we have studied internal structure of fractal sets from the broad viewpoint of analysis, geometry and algebra. In particular, we have considered stochastic processes and potential theory on fractals, which are thought of as models of objects in the nature. For instance, we have obtained conditions to ensure the existence of scaling relation of space-time on the heat conductance on fractals. Moreover, we have studied equilibrium state of heat on spaces with infinitely many holes and obtained a condition for the equilibrium state to be smooth.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：フラクタル 解析学 確率論 力学系

1. 研究開始当初の背景

フラクタルの数学的理論は、1970年代にマンデルブローによりその概念が提唱されて以来研究が続けられてきた。当初は、自己相似集合のハウスドルフ次元の計算などを行うフラクタル幾何学が、従来の geometric measure theory の研究を引き継いで盛んに行われた。しかしながら、1980年代後半からは Julia 集合などに関する力学系での研究、フラクタル集合によるタイリングに関する代数的な研究、フラクタル上での物理現象の記述に関する解析学的、確率論的研究など現在では数学の多岐にわたる分野においてフラクタルに関する研究が盛んになっている。そして現在では、フラクタルの数学的研究には代数・幾何・解析にわたる広い視点が必要とされるようになってきたのである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、フラクタルの“内的な構造”を次の (1), (2), (3) の視点から明らかにし、フラクタル幾何学、フラクタル上の解析学および確率過程論、(複素)力学系、フラクタルの応用(フラクタル的な亀裂を持つ弾性体の理論など)を互いに絡み合った対象として研究を行うことである

(1) 見た目にだまされない --- フラクタルに内在する構造：フラクタルに内在する構造というキーワードは「ユークリッドの距離からの脱却」と言い換えることもできる。上にも述べたように、多くのフラクタル集合はユークリッド空間に埋め込まれた形で導入され、ユークリッドの距離がそれらの集合にとって自然な距離であると思われてきた。しかしながら、多くのフラクタル集合の持つ内的な構造に注目して、フラクタル上に解析的構造(拡散過程、Sovolev 空間論など)、幾何学的構造(測度論的リーマン構造、双曲幾何的構造)などを構成することが本研究の目的の一つである。

(2) フラクタルを舞台とした代数、幾何、解析の相互作用 --- フラクタル上の数学理論を展開する際には、フラクタルに関する代数的、幾何的、解析的な複数の視点を持ち、それらの有機的な結びつきを明らかにすることが必要になる。(1)で述べたようなフラクタルの内的な構造を、代数、解析、幾何の視点を有機的に結びつけることで明らかにするのがこの研究のもう一つの目的である。

(3) フラクタルを超えて --- このキーワードは狭義には、「自己相似集合を超えて」と言い直すことができる。すなわち、これまで自己集合について発展してきた様々な理論を、ランダムな自己相似集合やパーコレーションクラスターなどの完全な自己相似性をもたないようなフラクタルに拡張することである。これに近い漸近挙動を持つことを示すのが具体的な目標である。「フラクタルを超えて」は広義にはフラクタルを実験場として、測度付きの距離空間(距離・測度空間)における解

析学、幾何学の理論を展開することである。

3. 研究の方法

本研究の方法の柱の一つは国際的な共同研究である。フラクタルに関係する海外および国内の研究者のネットワークを構成し、海外の研究者の招聘、海外への研究者の派遣を通じて高い水準の国際的な共同研究を行う。さらに、フラクタルに関係する研究で国際的には評価が高いが国内では知られていない分野(例えば、幾何学的関数解析など)の国際的に著名な研究者を招聘し国際研究集会を開催することで、より広い視点からの研究を行う。

4. 研究成果

(1) 研究代表者木上は、p-adic number を含む一般のコンパクトとは限らない Cantor set 上の jump process と Cantor set を特徴づける無限 tree 上の random walk の関係について研究を行った。まず、Cantor set 上に与えられた測度と対応する tree から非負の実数への関数の組から jump process の族が構成されることを明らかにし、その族が従来の研究で Alberverio-Karwowski によって構成された jump process を真部分集合として含むことを示した。さらに jump process に対する自然な距離の構成を行い、始めに与えられた測度がこの距離に関して volume doubling 条件を満たすときに jump process の熱核の漸近評価を与えた。特に下からの評価は、一般には任意の Annulus と一定以上の割合で交わりをもつ集合が構成でき、その集合上でのみ成立することが示された。この jump process の族のなかで、tree 上の random walk の Martin boundary への trace として得られるものの特徴づけを行った。

(2) 研究代表者木上は、Sierpinski gasket からその外周をなす正三角形の辺の一つ(単位区間)を除いた集合を考えると、Sierpinski gasket 上の Brown 運動は、tree 上の random walk と同等であることを発見し、この事実をもとに、Brown 運動の単位区間上への trace に対応する Dirichlet form の積分核を具体的に記述することに成功した。さらにこの積分核の構造を解析することで、熱核の対角成分の漸近挙動を決定した。熱核の非対角部分も含む漸近挙動についても研究を行い、上からの評価を得た。下からの評価については、Dirichlet form の一般論および jump process についての専門家である University of Washington の Chen 教授との共同研究を行い、部分的な結果を得、さらに現在最終的な解決に向けて共同研究を継続中である。

(3) 研究代表者木上は、自己相似集合などの入れ子構造を持つ集合の一般化として 距離空間の tree による parametrization という概念を定義した。さらに parametrization に

関する gauge function を導入し測度および距離からは共に対応する gauge function が構成できることを示した。gauge function という視点からは、測度に対する volume doubling という概念と、距離に関する quasisymmetric という概念が同値なものであることを明らかにした。この研究は一般の距離空間において解析学を展開するための基礎となる幾何学的構造を記述することを目的としており、解析学を展開の部分については次の研究課題として研究を継続している。

(4) 研究分担者相川は、複雑な領域に対する Intrinsic Ultracontractivityの十分条件を容量的幅によって与えた。そのために放物型箱議論 (Green関数の等高面と時間による適切な分割) を開発した。この十分条件をグラフで表される領域に応用し、除外集合を許したHarnack不等式を組み合わせてグラフの積分条件を与えた。任意の領域の Dirichlet 最小固有値の評価を容量的幅で与えた。連続率が積分条件で与えられるグラフを境界に持つ領域に対して境界Harnack原理を示した。

(5) 研究分担者位は熊谷は、Z.Chen氏、P.Kim氏らと共同で距離空間上の jump processの熱核とjume kernelの漸近挙動の関係を明らかにした。また、M.T. Barlow氏、D. Croydon氏と共同で2次元uniform spanning tree上のランダムウォークの収束について考察し、さらに極限過程の熱核の詳細な評価を得た。

(6) 研究分担者日野は、強局所対称ディリクレ形式に付随する対称拡散過程のマルチンゲール次元の定量評価の問題に取り組んだ。評価を与えるための一般論と具体的な自己相似フラクタルに適用するためのテクニックを開発し、特にSierpinski carpetにおいてはマルチンゲール次元はスペクトル次元以下であること、p.c.f.自己相似集合の場合はマルチンゲール次元が1であることを証明した。また関連する研究として、この研究で導入したディリクレ形式の(各点)指数が空間の仮想的な接空間の次元を表し、底空間に可測的なRiemann構造が導入されることを示した。これらについては学術誌に論文が掲載されたほか、論説記事を執筆した。

(7) 研究分担者宍倉は、無理的中立不動点を持つ複素力学系の局所不変集合を近放物型くりこみを用いて研究した。また、複素力学系の擬等角変形のスケール極限を1次元樹木とその上の区分的線型写像によって記述し、逆に1次元樹木上の区分的線型写像から擬等角手術によって有理関数を構成する方法を与えた。

(8) 研究分担者亀山は1有理関数のジュリア集合の full shift によるコーディングについて。"geometric coding tree" から決まるコーディングの構造について調べた。また複素数のべき乗は、原点中心の回転と合成してもべき乗と共役だが、四元数の場合はそうではなく、新しい写像が生まれ出されることを念頭に同様のことを一般次元で考えることによって現われる"擬べき乗写像"の力学系における構造を考察した。さらにこのとき現れる、ある種のランダム力学系の不変集合の不安定性について調べた。

(9) 分担者伊藤は、Jacobi-Perron algorithm のような2次元連分数展開に関する「新しいアルゴリズム」の上で、準周期タイリングを生成するための dual substitution (tiling substitution) を構成してみせた。この「新しいアルゴリズム」とは、Lagrange の定理の高次元化を目指すべく、value という概念を導入することによってつくられた、2次元連分数展開と関連する分岐型のアルゴリズムのことで、同じ体に属する実3次無理数のペアをこの新しいアルゴリズムに通すと、計算機実験上、例外なく周期的となることが確認されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

1. M. Hino, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読有
2. Z.-Q. Chen, D.A. Croydon and T. Kumagai, Quenched invariance principles for random walks and elliptic diffusions in random media with boundary. Ann. Probab., to appear, 査読有
3. K. Bogdan, T. Kumagai and M. Kwaśnicki, Boundary Harnack inequality for Markov processes with jumps. Trans. Amer. Math. Soc., to appear. 査読有
4. H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, to appear in J. Anal. Math. 査読有
5. M. Furukado, S. Ito, A. Saito, J. Tamura, S. Yasutomi, A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface. To appear in Experimental Mathematics, 査読有

6. A. Saito, S. Ito, Computation of true chaotic orbits using cubic irrationals, *Physica D*, 268, 2014, 100-105, DOI: 10.1016/j.physd.2013.11.003, 査読有
7. J. Kigami, Transition on a noncompact Cantor set and random walks on its defining tree, *Ann. Inst. Henri Poincare, Probab. Stat.*, vol 49, 2013, 10901129, DOI: 10.1214/12-AIHP946, 査読有
8. D.A. Croydon, A. Fribergh and T. Kumagai, Biased random walk on critical Galton-Watson trees conditioned to survive. *Probab. Theory Relat. Fields*, 157 (2013), 453–507. DOI:10.1007/s00440-012-0462-z, 査読有
9. M. Hino, Measurable Riemannian structures associated with strong local Dirichlet forms, *Math. Nachr.*, vol. 286 (2013), 1466-1478, DOI: 10.1002/mana.201200061, 査読有
10. M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, *Probab. Theory Relat. Fields*, 156(2013), 739-793, DOI: 10.1007/s00440-012-0442-3, 査読有
11. M.T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the equivalence of parabolic Harnack inequalities and heat kernel estimates. *J. Math. Soc. Japan*, 64 (2012), no. 4, 1091–1146, DOI:10.2969/jmsj/06441091, 査読有

〔学会発表〕 (計 30 件)

1. J. Kigami, Volume doubling property, quasisymmetry and time change of Brownian motion, *Fractal Geometry and Stochastics 5*, 2014/03/26, University of Jena
2. J. Kigami, Diffusion on inhomogeneous media and multifractal analysis, *Multifractal Analysis: From Theory to Applications and Back*, 2014/02/24, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery
3. J. Kigami, Analyses on measure metric spaces: Cheeger construction and measurable Riemannian geometry, *Recent Trends in Stochastic Analysis*, 2013/07/24, Pacific Institute for the Mathematics Sciences
4. J. Kigami, Completion of the Sierpinski gasket minus the unit interval, *Workshop: Heat kernels, Stochastic Processes and Functional Inequalities*, 2013/05/10, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
5. J. Kigami, Partition, volume doubling property and quasisymmetry, *Interaction Between Analysis and Geometry, Workshop III: Non-smooth geometry*, 2013/05/03, Institute of Pure and Applied

Mathematics, UCLA

6. J. Kigami, Analyses on metric-measure spaces, *Interaction Between Analysis and Geometry, Worksho I: Analysis on Metric Spaces*, 2013/03/20, Institute of Pure and Applied Mathematics, UCLA
7. J. Kigami, Partition, volume doubling property and quasisymmetry on metric measure spaces, *International Conference on Advances on Fractals & Related Topics*, 2012/12/12, The Chinese University of Hong Kong
8. J. Kigami, Analysis on Fractals, *The Applications of Fractal Geometry & Dynamical Systems Theory to Biology & Physics.*, 2012/06/20, Institute for the Applications of Mathematics & Integrated Science, University of California, Riverside
9. J. Kigami, Partition, volume doubling property and quasi symmetry on metric spaces, *AMS 1078th meeting*, 2012/03/08, University of Hawaii
10. J. Kigami, Dirichlet forms on a noncompact Cantor set and random walk on its defining tree, *First International meeting PISRS, Analysis, Fractal Geometry, Dynamical Systems and Economics*, 2011/11/10, University of Messina
11. J. Kigami, Dirichlet forms on a noncompact Cantor set and random walk on its defining tree, *Workshop "Foundation of Stochastic Analysis"*, 2011/09/21, Banff International Research Station
12. J. Kigami, Closure of $S\setminus I$, *AMS 1072th meeting*, 2011/09/10, Cornell University

〔図書〕 (計 1 件)

1. J. Kigami, *American Math. Soc. Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates*, 2012, 108 pages

6. 研究組織

(1)研究代表者

木上 淳 (KIGAMI, Jun)
 京都大学・大学院情報学研究所・教授
 研究者番号：90202035

(2)研究分担者

亀山 敦 (KAMEYAMA, Atsushi)
 岐阜大学・工学部・教授
 研究者番号：00243189

相川 弘明 (AIKAWA, Hiroaki)
 北海道大学・理学研究科・教授
 研究者番号：20137889

伊藤 俊次 (ITO, Syunji)
東邦大学・理学部・訪問教授
研究者番号：30055321

日野 正則 (HINO, Masanori)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：40303888

穴倉 光広 (SHISHIKURA, Mitsuhiro)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：701926爺06

熊谷 隆 (KUMAGAI, Takashi)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509

(3)連携研究者

長田 博文 (OSADA, Hirofumi)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207

小谷 元子 (KOTANI, Motoko)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50230024

服部哲弥 (HATTORI, Tetsuya)
慶応義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：教授

高橋 智 (TAKAHASHI, Satoshi)
奈良女子大学・人間文化研究科・准教授
研究者番号：70226835

栗田 和正 (KUWADA, Kazumasa)
東京工業大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30432032

若野 功 (WAKANO, Isao)
京都大学・大学院情報学研究科・講師
研究者番号：00263509

久保 雅義 (KUBO, Masayoshi)
京都大学・大学院情報学研究科・講師
研究者番号：10273616