

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340028

研究課題名(和文) 完全非線形方程式の粘性解の基礎理論と応用

研究課題名(英文) Fundamental theory for viscosity solutions of fully nonlinear equations and its applications

研究代表者

小池 茂昭 (Koike, Shigeaki)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：90205295

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：超線形増大の一階微分項を持つ退化楕円型方程式の非有界粘性解に対する比較原理を得た。アイザックス型微積分方程式の粘性解の表現公式を与えた。一階微分項に非有界係数を持つ完全非線形一様楕円型方程式の $L_p$ 粘性解に対する局所最大値原理を構築した。強圧的一階微分項を持つ微積分方程式の粘性解の正則性と時間大域的挙動を議論した。超線形増大の一階微分項を持つ完全非線形楕円型方程式の全域解の存在と一意性を得た。両側障害物を持つ平均曲率流方程式の粘性解のリプシッツ連続性を示した。

研究成果の概要(英文)：We obtained comparison principle for unbounded viscosity solutions of degenerate elliptic PDE with superlinear gradient terms. We presented a representation formula for viscosity solutions of integro-differential equations of Isaacs type. We established the local maximum principle for  $L_p$ -viscosity solutions of fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded coefficients to the first derivatives. We discussed regularity and large time behavior of viscosity solutions of integro-differential equations with coercive first derivative terms. We obtained existence and uniqueness of entire solutions of fully nonlinear elliptic equations with superlinear growth in the first derivatives. We showed the Lipschitz continuity of viscosity solutions of mean curvature flow equations with bilateral obstacles.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：粘性解 最大値原理 比較原理 ハルナック不等式 完全非線形 障害問題 非局所作用素

## 1. 研究開始当初の背景

1980年代初頭、退化2階完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式の適切な弱解の概念《粘性解》がCrandallとLionsによって導入され、一意存在等の基礎理論及び、微分幾何学・工学・経済学への応用研究が大きく進展した。その後、1989年のCaffarelliの先見的研究を基に1996年にCaffarelli、Crandall、Kocan、Swiechは不連続係数を持つ完全非線形一様楕円型方程式に対し、 $L^p$ 粘性解の概念を導入した。線形の場合のPoisson方程式に対応する最も単純な場合の完全非線形方程式に対し、 $L^p$ 評価、Schauder評価がCaffarelliによって得られたが、より一般的な完全非線形方程式に対する粘性解の正則性理論の構築が期待されていた。

## 2. 研究の目的

本研究では、完全非線形2階一様楕円型・放物型偏微分方程式の $L^p$ 粘性解の基礎理論の完成を目指す一方、粘性解理論の新たな応用を推進する。

## 3. 研究の方法

国外の共同研究者を訪問または、招聘し研究打合せをした。毎年、テーマを決めて、非線形偏微分方程式のワークショップを開催し、関連研究者に講演依頼した。

また、随時、研究発表を行った。

## 4. 研究成果

非有界領域で、低階微分項が一次以上の増大度がある完全非線形偏微分方程式の粘性解の比較原理が成り立つための粘性解の増大度と方程式の係数の増大度の十分条件を研究した。低階微分が二乗の項は、危険鋭感的最適制御や、大偏差原理などの応用があり、本研究の応用の部分の重要な問題である。粘性解の比較原理の仮定として、粘性解の増大度を規定する場合と、下に有界性を仮定して、上には増大度の制限を設けない場合があり、どちらも様々な研究がされてきた。しかし、特に後者は、最適制御の観点から自然と考えられてきた。しか

し、下に有界だけを仮定した場合、解が二つある微分方程式の例を発見した。これは、比較原理の結果に矛盾する。よって、本研究では、粘性解に増大度の仮定の下、比較原理を証明した。ここでの仮定は、我々が反例として見つけた微分方程式にも適用できる。

更に、非線形項が凸だけでなく、完全非線形の場合や、弱い結合条件下での方程式系へとこれらの比較原理を一般化した。

$L^p$ 粘性解の基礎理論に関しては、非有界係数および、非有界非斉次項をもつ完全非線形一様楕円型方程式に対する粘性解のABP最大値原理が成立するための十分条件を一般化した。この結果を用いて、同じ条件下で、非負粘性優解の弱ハルナック不等式も一般化した。更に、非有界係数、非斉次項の場合に、古典的手法ではハルナック不等式を導けないが、弱ハルナック不等式を応用して粘性劣解の局所最大値原理をまず示し、ハルナックの不等式を得た。

レヴィ過程を含んだ状態方程式をもとにしたコスト汎関数の最大最小問題(微分ゲーム)の値関数が対応する非局所項を含んだアイザックス方程式の粘性解であることは知られているが、与えられた関数(係数等)に関し一般的な仮定の下で、値関数の一意性を証明した。ここでは、非局所項を含む完全非線形方程式の一意性を、対応する微分ゲームにおけるコスト関数の劣最適性・優最適性を示すことで、比較原理を経ないで結果を得た。粘性劣解・粘性優解をそれぞれ、適切な二重の上限・下限近似を用いた。そのために、二重近似関数の基礎的な性質を整備した。

冪乗ラプラス作用素および、低階項が超線形増大の場合の粘性解のヘルダー連続性を導いた。最近、2次以上の増大度を持つ低階項がある一様楕円型方程式の解でなく、劣解の同程度連続性が得られるという顕著な結果があったが、最高次が冪乗ラプラス作用素の場合に低階項の増大度はどのようにすれば、同様の同程度連続性が得られるかという自然な疑問に対する回答である。このヘルダー連続性評価を用いて、対応す

る発展方程式の粘性解の時間大域的挙動を研究した。

非発散型の準線形退化・特異楕円型方程式の粘性解の比較原理を導いた。ここでは未知関数についての零階の項がない場合で、通常の粘性解理論では扱えない範疇である。発散型方程式においては、Poincare の不等式を用いて比較的簡単に示される方程式ですら、非発散型方程式の場合は未解決であった。非発散型方程式においては、未知関数の適切な変換を見つけた点が鍵となる。実際、既知の方法では、方程式の構造が不明瞭であったが、ここでは、見やすい変換により、方程式の構造を見やすくてきただけでなく、不連続性を含む方程式にも適応できるようになった。

Brezis は、全空間における半線形楕円型方程式の弱解の適切性を、解の無限遠での挙動を仮定せずに示した。この著名な結果は、様々な一般化が研究される中、近年、Vitolo を中心に非発散型方程式へと拡張されてきた。さらに、一階微分に超線形増大項を付け加えた時の解の適切性に関して、我々の結果を改良した。

非局所作用素（分数冪ラプラス作用素）と低階の超線形項のある微分積分方程式の粘性劣解のヘルダー連続性を導いた。通常、ヘルダー連続性は「解」に対して得られる性質であるが、ラプラス作用素と超線形増大度の1階微分項がある場合に、劣解に対してヘルダー連続性が導かれることが最近分かってきた。この、自然な一般化として、ブラウン運動に対応するラプラス作用素の代わりに、ジャンプのあるレヴィ過程に現れる分数冪ラプラス作用素に対しても一般化できることを示した。

平均曲率流方程式の両側障害問題の粘性解のリプシッツ連続性を導いた。また、両側障害問題の一意性に関し、主要偏微分作用素の項の条件を従来より広いクラスに対して与えた。

完全非線形一様楕円型方程式が劣線形増大度の1階微分項がある場合に、ABP 最大値原理を導いた。一方、この場合、通常の弱最大値原理は成立しない例を挙げた。こ

のため、弱ハルナック不等式の証明に必要なバリア関数の負値性の証明に、強最大値原理が使えない。そこで、局所的に強最大値原理が成り立つことを爆発法で示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 40 件)

- (1) S. Koike, T. Kosugi, Maximum principle for Pucci equations with sublinear growth in  $\mathbb{R}^n$  and its applications, *Nonlinear Anal.*, 160 巻 (2017 年), 1-15. 査読有
- (2) K. Ishii, H. Kamata, S. Koike, Remarks on viscosity solutions for mean curvature flow with obstacles, *Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation* 掲載決定, 査読有
- (3) G. Galise, S. Koike, O. Ley, A. Vitolo, Entire solutions of fully nonlinear elliptic equations with a superlinear gradient term, *J. Math. Anal. Appl.*, 441 巻 (2016 年), 194-210. 査読有
- (4) G. Barles, S. Koike, O. Ley, E. Topp, Regularity results and large time behavior for integro-differential equations with coercive Hamiltonians, *Cal. Var. Partial Differential Equations*, 54 巻 1 号 (2015 年), 539-572. 査読有
- (5) S. Koike, T. Kosugi, Remarks on the comparison principle for quasilinear PDE with no zeroth order terms, *Comm. Pure Appl. Anal.*, 14 巻 1 号 (2015 年), 133-142. 査読有
- (6) S. Koike, On the ABP maximum principle for  $L^p$ -viscosity solutions of fully nonlinear PDE, *Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Adv. Studies Pure Math.*, 64 巻 (2015 年), 113-124. 査読有
- (7) S. Koike, A. Swiech, Representation formulas for solutions of Isaacs

- integro-PDE, *Indiana Univ. Math. J.*, 62 卷 5 号 (2013 年), 1473-1502. 査読有
- (8) S. Koike, A. Swiech, Local maximum principle for  $L^p$ -viscosity solutions of fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients, *Comm. Pure Appl. Anal.*, 11 卷 5 号 (2012 年), 1897-1910. 査読有
- (9) S. Koike and O. Ley, Comparison principle for unbounded viscosity solutions of degenerate elliptic PDEs with gradient superlinear terms, *J. Math. Anal. Appl.*, 381 卷 1 号 (2011 年), 110-120. 査読有
- (10) H. Ikoma, H. Ishii, Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls, II, *Bull. Math. Sci.*, 5 卷 3 号 (2015 年), 451-510. 査読有
- (11) H. Ishii, P. E. Souganidis, Meta-stability for parabolic equations with drift: Part I, *Indiana Univ. Math. J.*, 64 卷 3 号 (2015 年), 875-913. 査読有
- (12) E. S. Al-Aidarous, E. O. Ebraheem, H. Ishii, Y. M. M. Arshad, Asymptotic analysis for the eikonal equation with the dynamical boundary conditions, *Math. Nachr.* 287 卷 14-15 号 (2014 年), 1563-1588. 査読有
- (13) G. Barles, H. Ishii, H. Mitake, A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Bull. Math.*, 3 卷 3 号 (2013 年), 363-388. 査読有
- (14) N. Ikoma, H. Ishii, Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 29 卷 5 号 (2012 年), 783-812. 査読有
- (15) Y. Fujita, H. Ishii, Uniqueness sets for minimization formulas, *Differential Integral Equations*, 25 卷 5-6 号 (2012 年), 579-588. 査読有
- (16) G. Barles, H. Ishii, H. Mitake, On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 204 卷 2 号 (2012 年), 515-558. 査読有
- (17) H. Ishii, P. E. Souganidis, A pde approach to small stochastic perturbations of Hamiltonian flows, *J. Differential Equations*, 252 卷 2 号 (2012 年), 1748-1775. 査読有
- (18) H. Ishii, Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions., *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 42 卷 1-2 号 (2011 年), 189-209. 査読有
- (19) H. Ishii, Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, *J. Math. Pures Appl.* (9), 95 卷 1 号 (2011 年), 99-135. 査読有
- (20) K. Fujimoto, H. Nagai, W. J. Runggaldier, Expected power-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observations, *Appl. Math. Optim.*, 67 卷 (2013 年), 33-72, 査読有
- (21) T. Mikami, Two end points marginal problem by stochastic optimal transportation, *SIAM J. Control Optim.*, 53 卷 4 号 (2015 年), 2449-2461. 査読有
- (22) T. Mikami, A characterization of the Knothe-Rosenblatt processes by a convergence result, *SIAM J. Control Optim.*, 50 卷 4 号 (2012 年), 1903-1920. 査読有
- (23) K. Ishii, M. Kimura, Convergence of a threshold-type algorithm using the signed distance function, *Interfaces Free Bound.*, 18 卷 4 号 (2016 年), 479-522. 査読有
- (24) K. Ishii, An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flow, *Nonlinear Differential Equations Appl. NoDEA*, 21 卷 2 号 (2014 年), 219-252. 査読有
- (25) K. Ishii, T. Eto, Y. Giga, An area-minimizing scheme for anisotropic mean-

curvature flow, Adv. Differential Equations, 17 卷 11-12 号 (2012 年), 1031-1084. 査読有

(26) T. Eto, Y. Giga, K. Ishii, An area minimizing scheme for anisotropic mean curvature flow, Japan Acad. Sci., 88 卷 1 号 (2012 年), 7-10. 査読有

(27) H. Nagai, Robust estimates of certain large deviation probabilities for controlled semimartingales, Stochastic Analysis, Banach Center Publ., 105 卷 (2015 年), 159-192. 査読有

(28) H. Nagai, H-J-B equations of optimal consumptions-investment and verification theorems, Appl. Math. Optim., 71 卷 (2015 年), 279-311. 査読有

(29) H. Nagai, Downside risk minimization via a large deviations approach, Ann. Appl. Probab., 22 卷 (2012 年) 608-669. 査読有

(30) M. Kurokiba, T. Ogawa, Two dimensional drift-diffusion system in a critical weighted space, Differential Integral Equations, 28 卷 7-8 号 (2015 年), 753-776. 査読有

(31) A. Kimijima, K. Nakagawa, T. Ogawa, Threshold of global behavior of solutions to a degenerate drift-diffusion system in between two critical exponents, Calc. Var. Partial Differential Equations, 53 卷 1-2 号 (2015 年), 441-472. 査読有

(32) M. Mizuno, T. Ogawa, Regularity and asymptotic behavior for the Keller-Segel system of degenerate type with critical nonlinearity, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 20 卷 3 号 (2013 年), 375-433. 査読有

(33) M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami, Positive solutions of a semilinear elliptic equation with singular Dirichlet boundary data, J. Elliptic Parabol. Equ., 1 卷 (2015 年), 335-362. 査読有

(34) M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami, Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a

dynamical boundary condition, Calc. Var. Partial Differential Equations, 54 卷 2 号 (2015 年), 2059-2078. 査読有

(35) K. Ishige, P. Salani, A note on parabolic power concavity, Kodai Math. J., 37 卷 3 号 (2014 年), 668-679. 査読有

(36) K. Ishige, P. Salani, Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems, Math. Ann., 358 卷 3-4 号 (2014 年), 1091-1117. 査読有

(37) M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami, Large-time behavior of small solutions of a two-dimensional semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Asymptot. Anal., 85 卷 1-2 号 (2013 年), 107-123. 査読有

(38) D. Andreucci, K. Ishige, Local quasi-concavity of the solutions of the heat equation with a nonnegative potential, Ann. Mat. Pure Appl. (4), 192 卷 3 号 (2013 年), 329-348. 査読有

(39) K. Ishige, K. Nakagawa, P. Salani, Power concavity in weakly coupled elliptic and parabolic systems, Nonlinear Analysis, 131 卷 (2016 年), 81-97. 査読有

(40) S. Okabe, The variational problem for a certain space-time functional defined on planar closed curves, J. Differential Equations, 252 卷 10 号 (2012 年), 5155-5184. 査読有

[学会発表] (計 5 件)

(1) S. Koike, 「On the ABP maximum principle for  $L^p$ -viscosity solutions of fully nonlinear PDE」The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics and PDE 国際研究集会・九州大学・2011 年 9 月 15 日

(2) 小池茂昭, 「ABP 最大値原理について」日本数学会 2016 年度年会企画特別講演, 筑波大学, 2016 年 3 月 19 日

(3) S. Koike, 「Entire solutions of fully nonlinear elliptic PDE with superlinear gradient terms」Workshop on nonlinear

partial differential equations and related topics,

石川県文教ホール, 2016年5月10日

(4) S. Koike, 「Fully nonlinear uniformly elliptic/

parabolic PDE with unbounded ingredients」Hamilton-Jacobi Equations New trends and applications, INSA, Rennes 大学, 2016年5月31日

(5) 小池茂昭, 「粘性解のABP最大値原理とその応用」日本数学会年会函数方程式論分科会特別講演, 首都大学東京, 2017年3月25日.

〔図書〕(計1件)

小池茂昭「粘性解 -比較原理を中心に-」(2016), 共立出版, 216ページ.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90205295

(2)研究分担者

石井 仁司 (ISHII HITOSHI)

早稲田大学 教育・総合科学学術院・教授

研究者番号: 7010202887

三上 敏夫 (MIKAMI TOSHIO)

広島大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号: 70229657

石井 克幸 (ISHII KATSUYUKI)

神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授

研究者番号: 40232227

長井 英生 (NAGAI HIDEO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号: 70110848

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 220224107

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)

東北大学・大学院理学系研究科・教授

研究者番号: 90272020

岡部真也 (OKABE SHINYA)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 70435973

(3)連携研究者

( )

研究者番号:

(4)研究協力者

( )