

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23340032

研究課題名(和文)無限自由度量子系の確率解析的手法による非摂動的スペクトル解析

研究課題名(英文)Non-perturbative spectral analysis of quantum system by stochastic method

研究代表者

廣島 文生(Hiroshima, Fumio)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：00330358

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,000,000円、(間接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：場の量子論における、非相対論的PF模型、ネルソン模型、スピンボゾン模型のスペクトルを汎関数積分をつかって解析した。特に多様体上の場の理論、enhanced binding と non-enhanced binding、非局所的なPF模型の解析、UV切断のくりこみ、ギブス測度の無限体積極限(局所弱の意味)の存在などを非摂動的に示すことが出来た。

研究成果の概要(英文)：Spectrum of non-relativistic QED, the Nelson model and spin-boson models in quantum field theory are studied by functional integrations. We can investigate QFT on manifold, enhanced binding and non-enhanced binding, non-local PF model, removal of UV cutoff and infinite volume limit of Gibbs measure in the sense of local weak in a non-perturbative way.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：場の量子論 汎関数積分 ファインマンカツ公式 基底状態 スペクトル解析 ギブス測度 シュレディンガー-作用素 レヴィー測度

1. 研究開始当初の背景

数学的な量子場に現れるハミルトニアンはある無限次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素として実現できる。そのスペクトルを厳密に知ることはその系の性質を完全に知ることに対応する。抽象的に述べれば以下のようなになる。

量子場を表すボゾンフォック空間 $\mathcal{F}$ と粒子の状態を表すヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の複素数体上テンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}$ 上に作用する自己共役作用素  $H$  に相互作用といわれる摂動  $I$  を加える。自己共役作用素  $H+I$  のスペクトルを完全に知りたい。特に、研究開始当初は非相対論的量子電磁力学、ネルソン模型、スピンボゾン模型の基底状態、共鳴、散乱理論、enhanced binding などが研究されていた。しかし、多様体上に定義された模型の解析、準相対論的な模型に現れる非局所的な作用素の解析、さらに enhanced binding の起きない領域などの研究は全くされていなかった。多様体、非局所的な作用素、non-enhanced binding などが研究開始当初のキーワードであった。

2. 研究の目的

平成 23 年度研究計画調書の[研究計画・方法]に掲げたものをここに記す。大きく分けると以下の 1-6 が研究の目的であった。

1. 汎関数積分による一般的な擬リーマン多様体上の場の量子論のスペクトル解析

- (a)線形結合したスカラー場
- (b)ミニマル結合したベクトル場

2. Enhanced binding と non-enhanced binding 及び臨界結合定数の評価

- (a)双極子近似 Pauli-Fierz 模型
- (b)多体(>2)準相対論的 Nelson 模型
- (c)フェルミ統計の場合

3. 汎関数積分による Bernstein 関数へ一般化された非局所的 Pauli-Fierz 模型のスペクトル解析

- (a)スピンがない場合と並行移動不変な場合
- (b)スピンがある場合と並行移動不変な場合

4. 汎関数積分による Nelson 模型の紫外切断除去

- (a)紫外切断を除去した Nelson 模型の真空期待値の経路積分表現
- (b)熱半群の正值改良性

5. ファインマン・カツツ公式の一般化とギブス測度の無限体積極限の存在

6. Pauli-Fierz 模型の基底状態のボゾンの個数の局所性

3. 研究の方法

上記の[研究の目的 2.] 沿って述べる。

1. 汎関数積分表示と擬微分作用素の理論を応用して基底状態の存在・非存在と多様体の局所的な性質を明らかにする。

2. Birman の原理を応用して non-enhanced binding を示し、汎関数積分表示を応用し

て準相対論的な Nelson 模型の enhanced binding を示せ。

3. ブラウン運動と subordinator という 2 つの確率過程を用いて、非局所的な PF 模型の生成する熱半群を表現して、自己共役性、基底状態のガウス型減衰性、固有ベクトルの空間的減衰性、ギブス型測度の存在を示す。

4. Girsanov の定理及び汎関数積分をつかたくりこまれたハミルトニアンのスペクトルの下からの一様な評価から、紫外切断をくりこんだハミルトニアンを半群レベルで示す。

5. 基底状態の存在を用いて、有限体積ギブス測度の無限体積極限を局所弱収束(local weak convergence)の意味で示す。

6. 汎関数積分表示と無限体積ギブス測度の存在を使って示す。

4. 研究成果

上記の[研究の目的 2.] 沿って述べる。

1. (a)⑬⑭⑮の論文で基底状態の存在非存在と多様体の局所的な性質を明確にした。特に変数質量と言われる概念が自然に現れ、その減衰性のオーダーと基底状態の存在非存在の関係を明白にした。

1. (b)残念ながら自分自身で研究するにはいたらなかったが、自分の学生が修士論文として研究をした。

2. (a)⑯にまとめた。Non-enhanced binding の領域を見つけた。

2. (b)プレプリント④で証明した。

2. (c)成果を出すにはいたらなかった。

3. (a)①で本質的自己共役性、ガウス型減衰性、空間減衰性、ギブス型測度の無限体積極限の存在を示した。またプレプリント①②で自己共役性と基底状態の存在(HVZ 定理)を示した。これらの結果は研究当初の予想を大幅に超えるものであった。

3. (b) (a)の結果を応用できるめどが立った。近い将来に論文としてまとめる予定である。

4. (a)プレプリント③にまとめた。当初の研究計画通り完璧に証明することが出来た。

4. (b) 成果を出すにはいたらなかった。

5. ⑧⑨⑩でファイマン・カツツ型公式を一般化してスペクトル解析をおこなった。また①②でギブス測度の無限体積極限が local weak な意味で存在することを示した。この測度をつかって、基底状態に関する様々な期待値を計算した。

6. 成果を出すにはいたらなかった。

プレプリント(いずれも国際誌に投稿中)

①Spectrum of semi-relativistic PF model (with T. Hidaka)

②Self-adjointness of semi-relativistic PF model (with Hidaka)

- ③ Ultraviolet renormalization of the Nelson model through functional integration (with M. Gubinelli and J. Lorinczi)  
 ④ Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field II (with I. Sasaki)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件 全て査読あり)

- ① F.Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models, to appear, Adv.Math. 259(2014), 784-840.  
 ② M.Hirokawa, F.Hiroshima and J.Lorinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, to appear in Math.Z.  
 ③ M.Hirokawa and F.Hiroshima, Absence of energy level crossing for the ground state energy of the Rabi model, to appear in Commun.Stochastic Analysis. 2014.  
 ⑤ F.Hiroshima and J.Lorinczi, The Spectrum of non-local discrete Schroedinger operators with a  $\delta$ -potential, to appear in JMI, 2014.  
 ⑥ F.Hiroshima and I.Sasaki, Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators: the lowest eigenvalue and no crossing, J.Math.Anal.Appl. 45 (2014), 595-609.  
 ⑦ F.Hiroshima and I.Sasaki, Multiplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillator, Kyushu J.Math. 67 (2013), 355-366.  
 ⑧ F.Hiroshima, T.Ichinose and J.Lorinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schroedinger operators with Spin 1/2, Publ.RIMS Kyoto 49 (2013), 189-214.  
 ⑨ F.Hiroshima and J.Lorinczi, Lieb-Thirring bound for Schroedinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, Commun.Stochastic Analysis 6 (2012), 589--602.  
 ⑩ F.Hiroshima, I.Sasaki, T.Shirai and A.Suzuki, Note on the spectrum of discrete Schroedinger operators, JMI 4 (2012), 105-108.  
 ⑪ F.Hiroshima, J.Lorinczi and T.Takaesu, A probabilistic representation of the ground state expectation of fractional powers of the boson number operator, JMAA 395(2012), 437-447.

- ⑫ F.Hiroshima, T.Ichinose and J.Lorinczi Path integral representation for Schroedinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, Rev.Math.Phys. 24(2012), 1250013(40 pages)  
 ⑬ C.Gerard, F.Hiroshima, A.Panati and A.Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, LMP 101(2012), 305-322.  
 ⑭ C.Gerard, F.Hiroshima, A.Panati and A.Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, J.Funct.Anal. 262(2012), 273-299.  
 ⑮ C.Gerard, F.Hiroshima, A.Panati and A.Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, Commun.Math.Phys. 308(2011), 543-566.  
 ⑯ F.Hiroshima, H.Spohn and A.Suzuki, The no-binding regime of the Pauli-Fierz model, J.Math.Phys. 52 (2011), 062104.

[学会発表] (計 26 件)

- ① F.Hiroshima, Non-perturbative approach to QFT, Universite de Rennes 1, 金曜セミナー, 2014年3月21日.  
 ② F.Hiroshima, 確率解析的くりこみ理論, RIMS, 確率論シンポジウム, 2013年12月20日.  
 ③ F.Hiroshima The lowest eigenvalue of Rabi model and non-commutative harmonic oscillators, Workshop on random analytic function, random matrices and determinantal point processes, 九大数理, 2013年11月29日.  
 ④ F.Hiroshima, Functional integral approach to rigorous quantum field theory, チュニジア-日本 分科・科学・技術学術会議 2013, Yasmine Hammamet, Tunisia, 2013年11月15-19日.  
 ⑤ F.Hiroshima, Gibbs measure approach to spin-boson model, International Conference on Stochastic analysis and applications, Hammamet, Tunisia, 2013年10月14-19日.  
 ⑥ F.Hiroshima 非相対論的量子場とギブス測度, 数理物理 2013 東大, 連続3回講演, 2013年9月28日.  
 ⑦ F.Hiroshima, ラプラシアン of the Bernstein関数で定義されるシュレディンガー作用素の Lieb-Thirring bound, 関数方程式論分科会, 愛媛大学, 2013年9月25日.  
 ⑧ F.Hiroshima, ボアソン過程によるスピノゾン模型の解析, 関数解析分科会, 愛媛大学, 2013年9月24日.  
 ⑨ F.Hiroshima, 準相対論的 Pauli-Fierz模型の汎関数積分による解析, 関数解析分科会, 愛媛大学, 2013年9月24日.

⑩ F.Hiroshima, 汎関数積分によるネルソン模型の紫外切断のくりこみ, 関数解析分科会, 愛媛大学, 2013年9月24日.

⑪ F.Hiroshima, Spectrum of non-commutative harmonic oscillator and related models, 大学セミナー, Bologna University, 2013年9月17日.

⑫ F.Hiroshima, Ultraviolet Renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integral, RIMS くりこみ群の数理科学への応用, 2013年9月11-13日.

⑬ F.Hiroshima, 格子状の fractional Schroedinger 作用素のスペクトル, 作用素論研究集会, 広島大学, 2013年9月6-9日.

⑭ F.Hiroshima, The lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators, RIMS, 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究, 2013年6月2-4日.

⑮ F.Hiroshima, Enhanced binding for quantum field models, Universit'e de Rennes 1, 2013年3月14日.

⑯ F.Hiroshima, Gibbs measure approach to ground states in quantum field theory, Universite d'Aix Marseilles, Luminy, Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilites seminar, 2013年3月4日.

⑰ F.Hiroshima, スピンボゾン模型と van-Hove 表現, RIMS, 量子化と作用素環, 2013年2月4日.

⑱ F.Hiroshima, Spin-boson model through a Gibbs measure on cadlag paths, RIMS, 確率論シンポジウム, 2012年12月19日.

⑲ F.Hiroshima, Analysis of spin-boson model by Gibbs measures on cadlag path space, RIMS, スペクトル散乱理論とその周辺, 2012年12月14日.

⑳ F.Hiroshima, Ground state of Rabi mode, 九大, 非可換調和振動子のスペクトルと量子デバイスの数理, 2012年11月25日.

(21) F.Hiroshima, Removal of UV cutoff of the Nelson model by stochastic analysis, RIMS, 量子場の数理とその周辺, 2012年11月16日.

(22) F.Hiroshima, Spectral analysis of spin-boson model by path measures, 大分大学九州支部例会, 2012年10月27日.

(23) F.Hiroshima, 非可換係数調和振動子の固有値の縮退度, 作用素論研究集会, 新潟大学駅南キャンパス, 2012年9月7-10日.

(24) F.Hiroshima, Mathematical UV cutoff renormalization of a scalar quantum field model, 物理と情報の階層構造, 京都大学基礎物理学研究所 2012年1月5日.

(25) F.Hiroshima, Spectrum of scalar quantum field model on a Lorentzian manifold, RIMS くりこみ群の数理科学への応用, 2011年9月12-14日.

(26) F.Hiroshima, Ground state of scalar quantum field on pseudo Riemannian manifolds, Scattering theory: An international workshop in Tokyo, 東大, 2011年6月21日.

[図書] (計3件)

① J.Lorinczi, F.Hiroshima and V.Betz, Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory, Studies in Mathematics 34, Walter de Gruyter 2011 pp507.

② F.Hiroshima, H.Spohn, I.Sasaki and A.Suzuki, Enhanced binding in quantum field theory, COE Lecture Note 38 Kyushu University 2012 pp206.

③ 廣島文生, 量子力学と関数解析, 数理科学 2012年5月号 サイエンス社 20-25 2012

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

廣島文生 (HIROSHIMA FUMIO)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：00330358

### (2) 研究分担者なし

### (3) 連携研究者

伊東恵一 (ITO KEIICHI)  
摂南大学理工学部教授  
研究者番号： 50268489

廣川真男 (HIROKAWA MASAO)  
岡山大学大学院自然科学研究院教授  
研究者番号：70282788

松井卓 (MATSUI TAKU)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：50199733

尾畑伸明 (OBATA NOBUAKI)  
東北大学大学院情報科学研究科教授  
研究者番号：10169360

佐々木格 (SASAKI ITARU)  
信州大学総合工学系研究科助教  
研究者番号：50558161

鈴木章斗 (SUZUKI AKITO)  
信州大学工学部助教  
研究者番号：70585611