

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23500016

研究課題名(和文) プログラム意味論と量子トポロジー

研究課題名(英文) Semantics of Programming Languages and Quantum Topology

研究代表者

長谷川 真人 (Hasegawa, Masahito)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：プログラム意味論と量子トポロジーは、トレース付きモノイダル圏やリボン圏など、共通する圏論的構造を持ち多くの類似点があるにも関わらず、両者の間の具体的な関係は知られていなかった。本研究では、プログラム意味論で用いられる圏に量子トポロジーの手法を適用することにより、両分野の橋渡しとなる具体例の構築を行った。

特に、集合と二項関係のなす圏において量子二重化によりリボンホップ代数を構成し、非自明なブレイドを持つリボン圏を導いた。反面、ゲームと勝利戦略のなす圏においてはホップ代数は自明なものしか存在せず、量子トポロジーの手法をそのまま用いることは困難であることがわかった。

研究成果の概要(英文)：Traced monoidal categories and ribbon categories have been commonly used in semantics of programming languages and quantum topology. However, no concrete example of relating these two areas were not known before. Through this research project, we have constructed such examples by applying ideas and techniques of quantum topology to the categories used in semantics.

Specifically, in categories like Rel, we obtained ribbon Hopf algebras via quantum double construction, and derived ribbon categories with non-trivial braidings. On the other hand, we also discovered that such a construction cannot be done for categories of sequential games, in which no non-trivial Hopf algebra exist.

研究分野：理論計算機科学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：ソフトウェア プログラム理論 プログラム意味論 トポロジー 量子不変量

1. 研究開始当初の背景

相互作用の幾何は、1980年代後半に、Girardが、数理論理学の証明論における「証明の標準化」の過程の数学モデルとして考案したものである。その後、90年代初頭に、Abramskyが、双方向に作用しあう計算プロセス同士のなす関係を理解するための枠組みとして、一般化されたかたちでの相互作用の幾何を展開した。その数学的な核心は、巡回的な構造をもつ圏(**トレース付きモノイダル圏**)から、自己双対な圏(**コンパクト閉圏**、あるいはより一般に**リボン圏**)を構成する、**Int 構成**と呼ばれる方法である。コンパクト閉圏では、双方向に計算がすすむようなプロセスのモデルを自然に幾何的に与えることが出来、Int 構成は、そのような相互作用の幾何のモデルを構成する技法であるといえる。

また、1990年代半ばに、提案者とHylandは、独立に、再帰プログラムの意味論において用いられる不動点演算子が、トレース付きモノイダル圏におけるトレースの特殊な場合になっていることを発見した。このことから、再帰プログラムの意味論で用いられる圏の多くがトレース付きモノイダル圏であること、そしてそれらにInt構成を施すことによって、相互作用の幾何のモデルが自然に得られることがわかる。さらに、トレース付きモノイダル圏を用いて、再帰プログラムの意味論を大きく拡張することができる(**再帰プログラムの幾何**)。この発見以降、再帰プログラムの幾何と相互作用の幾何は、トレース付きモノイダル圏の枠組みとInt構成を介して密接に関連するものとして認知されるようになった。

一方、トレース付きモノイダル圏は、もともと、1980年代以降の結び目の**量子不変量**をはじめとする低次元トポロジーの研究(**量子トポロジー**)から生まれた概念であり、結び目などの位相幾何学的な対象と深く関係してい

る。例えば、**量子群**の表現の圏はトレース付きモノイダル圏(リボン圏)であり、これからJones多項式等の結び目の不変量が導かれる。

しかしながら、共通する圏論的な構造を用いてはいても、プログラム意味論と量子トポロジーとの間にはこれまで実質的な関係は見出されていなかった。両分野で共通して用いられる具体的な圏の例は皆無であり、両分野の関係は表面的な類似性が指摘されるにとどまっていた。特に、量子トポロジーの中心的なアイデアである、量子化による非自明なブレイドの構成は、プログラム意味論においては対応するものが見つかっていなかった。

2. 研究の目的

研究代表者は、プログラム意味論でよく用いられる圏Relにおいて、量子群に相当するリボンHopf代数を構成することに成功し、**プログラム意味論と量子トポロジーの双方の特徴を兼ね備えるリボン圏を構成**できることを発見した。本研究は、この結果を出発点として、再帰プログラムの幾何・相互作用の幾何を中心としたプログラム意味論を、量子トポロジーに由来する知見を導入することにより拡張し(**プログラム意味論の量子化**)、その数学的な基礎およびプログラミング言語理論における応用を与えることを目指した。また、長期的な目標として、位相的量子計算とプログラム意味論を結びつける理論的な基盤を与えることを目指した。

3. 研究の方法

プログラム意味論で重要な役割を果たすコンパクト閉圏や*-**自律圏**(コンパクト閉圏より弱い双対性を持つ圏)においてリボンHopf代数を構築し、有用な具体例を構築すること、およびこのアプローチに必要な基礎理論を整備することを研究の中心課題とした。

研究期間の後半では、ゲーム意味論で用いられる圏においてこれまでリボン Hopf 代数が全く見つかっていないことに注目し、その理由を特定することに力を注いだ。

また、この研究課題に関心を抱く海外の研究者と積極的に協力し研究を遂行した。具体的には、Tamas Hajgato (ハンガリー・Szeged 大・大学院生)、Kenji Maillard (フランス・ENS Paris・大学院生)、Jamie Vicary (英国・Oxford 大・ポスドク)ら、若手研究者達と共同で研究を行った。

4. 研究成果

(1) 集合と二項関係の圏 Rel におけるリボン Hopf 代数の構成を整理した。その構成で重要となる量子二重化の手法について、一般のトレース付きモノイダル圏と Int 構成の枠組みで平易な定式化を与えた。これらは論文で発表した。

(2) トレースを持つ*-自律圏の構造は長らく明らかでなかったが、それらがすべてコンパクト閉圏の構造を持つことを証明し、この問題を解決した (Tamas Hajgato との共同研究)。この結果は論文で発表した。

(3) ゲーム意味論で用いられる基本的な圏のひとつである、Conway ゲームのコンパクト閉圏において、非自明な Hopf 代数が存在しないことを突き止めた (Kenji Maillard との共同研究)。この結果は、知られている多くのゲームの圏にもそのまま適用できる。

(4) 有限性空間の*-自律圏、モジュール(ブローファンクタ)のコンパクト閉双圏などに、Rel の場合と類似したリボン Hopf 代数が存在することを確認した (Kenji Maillard との共同研究)。

(5) 前述のトレースを持つ*-自律圏に関する

結果(2)を、一般のコンパクト閉双圏におけるトレース付き*-自律対象に拡張することを試みた (Jamie Vicary との共同研究)。

これらの成果は論文や学会等で発表した(については現在も共同研究が進行中である)。2014年6月の国際研究集会 11th Workshop on Quantum Physics and Logic (QPL 2014)では、本研究の全体像及び主要な成果に関して招待講演を行う予定である。

また、本研究課題と広く関連するプログラム意味論・ラムダ計算全般を対象とした国際会議 TLCA 2013 のプログラム委員長を務め、分野全体の最新の成果を収めた論文集を編集し出版した(図書)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

Tamas Hajgato and Masahito Hasegawa, Traced *-autonomous categories are compact closed, Theory and Applications of Categories, 査読有, Vol. 28(7), 2013, 206-212.
URL:<http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/28/7/28-07abs.html>

Masahito Hasegawa, A quantum double construction in Rel, Mathematical Structures in Computer Science, 査読有, Vol. 22(4), 2012, 618-650.

DOI:10.1017/S0960129511000703

[学会発表](計 4件)

Masahito Hasegawa, Traced *-autonomous categories are compact closed, 研究集会 SLAGICS 2013, 京都大学, 2013年9月25日

長谷川真人, テンソル圏・プログラム

意味論・量子トポロジー，第14回プログラミング及びプログラミング言語ワークショップ(招待講演)，白浜，2012年3月8日

Masahito Hasegawa，A model of braided linear logic，研究集会「相互作用の幾何，トレース付きモノイド圏と非明示的計算量」，京都大学，2011年11月7日

〔図書〕(計 1件)

Masahito Hasegawa (editor)，Typed Lambda Calculi and Applications: 11th International Conference，TLCA 2013，Proceedings，Springer Lecture Notes in Computer Science，Vol. 7941，2013，249 pages

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~hassei/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長谷川 真人 (ハセガワ マサヒト)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973