

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23500020

研究課題名(和文) 離散最適化問題の計算モデルと高品質アルゴリズム設計

研究課題名(英文) Computational Models and Efficient Algorithm Design for Discrete Optimization Problems

研究代表者

宮野 英次 (Miyano, Eiji)

九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授

研究者番号：10284548

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：多くの重要な離散最適化問題は計算量の意味で困難(NP困難)となる。すなわち、最適解を求めるための多項式時間で動作するアルゴリズムが存在しない。また、ある状況では、問題を解く前に、完全な入力を与えられない場合もある。例えば、入力が徐々に与えられるような要求列となっている場合である。将来の要求に関する情報が欠損している場合にもアルゴリズムは効率よく動作する必要がある。前者をオフライン計算モデル、後者をオンライン計算モデルと呼ぶ。本研究では、それら2つの計算モデルにおける困難な離散最適化問題に対して、最適解に対する出力解の精度が理論的に保証されたアルゴリズムを設計した。

研究成果の概要(英文)：Many interesting discrete optimization problems are computationally intractable (NP-Hard), i.e., there are no algorithms to find optimal solutions to such problems in polynomial time. In some situations, the complete input is not known in advance, for example, the input is a request sequence that is revealed gradually over time. Under the lack of information on future requests, the algorithm has to perform well. In this research, for such two types of "hard" discrete optimization problems, we designed efficient algorithms which are theoretically evaluated by the worst case possible relative errors over all possible instances of the problems.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：離散最適化問題 オフライン計算モデル オンライン計算モデル 計算困難問題 近似精度 競合精度  
アルゴリズム設計

## 1. 研究開始当初の背景

現実世界に現れる生産計画やスケジューリング問題は離散的な構造を有しており、離散最適化問題として定式化できる場合が多い。すなわち、時間やコストなどの制約となる離散パラメータ値と満足度を評価するための目的関数が入力として与えられ、すべての制約条件については完全に満たして、さらに目的関数の値を最適化する離散最適化問題として定式化できる場合が多い。これら離散最適化問題の計算モデルとして、大きく2つのモデルを考えることができる。(I) オフライン情報モデル。目的関数や制約条件などの入力インスタンスに関する情報が完全な形で与えられた場合の計算モデル。(II) オンライン情報モデル。メモリや時間的な制約から正確な情報処理を行うための一部の情報を得ることができない場合や、原理的に不完全情報を取り扱う計算モデル。

(I)の完全情報を取り扱う場合も、多くの場合にはNP困難問題集合に属してしまい、 $P \neq NP$  予想が成り立つとすると、厳密な最適解を求めるためのアルゴリズムの動作時間は問題のサイズが大きくなるに従って指数的に爆発する。しかし、NP困難問題集合は応用の面でも重要な問題が多く、条件に制限を加え、条件を緩和して解く必要がある。本研究では2つのアプローチを用いてNP困難問題集合に対するアルゴリズムの設計を行う。(i) 最適解条件の緩和。厳密な最適解を求めることを諦めて、準最適解を求めるための多項式時間アルゴリズムを設計する。理論的に重要な点は、得られた準最適アルゴリズムの出力解の近似精度を数学的に保証すること、さらに、その近似精度に改善の余地があるのか、それとも理論的なベストであるのかという近似精度の意味での計算限界を示すことである。特に、確率的検証可能性定理(PCP定理)と呼ばれる道具が提案されて依頼、欧米を中心に多くの研究が行われている。(ii) 固定パラメータに対する計算量。問題にパラメータを導入して、小さな固定パラメータについてのみ高速なアルゴリズムを設計する。設計したアルゴリズムの計算時間が、例えば、 $f(k) \cdot n^{O(k)}$ となるように、入力サイズ $n$ の肩に $k$ が乗らないパラメータ $k$ を選ぶことで、 $k$ が小さい場合には多項式時間動作を保証することができる。

(II)の不完全情報を取り扱う計算モデルでは、計算過程の中で必要な情報が徐々に得られ、随時入力情報に対応しながら処理を進めなければならず、設計したアルゴリズムは競合精度で評価される。また、オンライン情報モデルにおいても、競合精度の意味での計算限界を示すことで、理論的に保証された競合精度を評価することができる。さらに、アルゴリズムにどの程度の計算リソースを与えることで大きく競合精度が改善されるかを調べる必要がある。

これまでも、数多くの研究成果が得られていたが、近似上界と近似下界のギャップ、競合上界と競合下界のギャップが残っている問題や、近似アルゴリズムの設計とその限界、または競合アルゴリズムの設計とその限界の解明が求められている離散最適化問題が数多くあった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、以下の(I)及び(II)の2種類の困難な離散最適化問題を対象とした計算モデルの構築、計算理論的解析に裏付けされた解精度保証のあるアルゴリズム設計手法の開発、及び問題自体が有する解精度の意味での困難性の解明を行うことである。

- (I) NP困難問題と呼ばれる多項式時間で最適解を求めるためのアルゴリズムを持たないであろうと予想されている最適化問題。
- (II) 入力インスタンスの情報の一部が与えられていない(もしくは利用できない)最適化問題、すなわち、情報が不完全な形で与えられるために最適解を求めることが困難な最適化問題。

## 3. 研究の方法

研究の形態は理論的な解析が中心であり、以下のような手順で研究を行った。

(1) 参考研究や類似研究の結果の調査、アルゴリズム設計法と下界証明の数学的手法の調査、現実世界に表れる離散最適化問題の抽出。

(2) (1)で得られた離散最適化問題のオフライン情報モデルとしての定式化と計算複雑さの解明、近似精度を保証した多項式時間アルゴリズム設計と近似精度の限界の証明、離散最適化問題へのパラメータの導入と固定パラメータに対する容易性・困難性の証明。

(3) (1)で得られた離散最適化問題のオンライン情報モデルとしての定式化、オフライン最適化アルゴリズム設計、競合精度を保証したアルゴリズム設計と競合精度の限界の証明、リソースと競合精度の関係の明確化。

## 4. 研究成果

(I)については、頂点数最大正則誘導部分グラフ抽出問題、無向グラフの有向化最適化問題、直径を制約とした最適部分グラフ抽出問題、ソーティングバッファ最適化問題、最大独立頂点集合問題を距離に関して一般化した最適化問題、最大隣接集合問題、最大隣接辺集合問題、ブックマーク最適化問題、シュタイナー木の最大埋込問題等に関して、オフライン情報モデルとして定式化を行い、それら離散最適化問題の計算複雑さの解明、近似精度を保証した多項式時間アルゴリズム設計と近似精度の限界の証明、離散最適化問

題へのパラメータの導入と固定パラメータに対する容易性・困難性の証明を行った。(II)については、W-CDMA方式で用いられる直交可変拡散率(OVSF)符号割当をオンライン情報モデルとして定式化したオンラインOVSF符号割当問題に対して、解精度の尺度である競合比と計算リソースである割当帯域との関係を調べた。それぞれについて主な研究成果について以下で述べる。

(1) 頂点数を最大とする $r$ 正則誘導連結部分グラフ問題( $r$ -MaxRICs)は、 $n$ 頂点グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき、頂点部分集合 $S \subseteq V$ によって誘導される部分グラフ $G[S]$ が連結、かつ $r$ 正則であり、頂点数が最大となるような $S$ を見つける問題である。 $2$ -MaxRICsはNP困難となり、さらに、 $P \neq NP$ を仮定した場合、任意の $\varepsilon > 0$ について近似率 $n^{1-\varepsilon}$ を持つ多項式時間アルゴリズムが存在しないことが知られている。本研究では、任意の整数 $r \geq 3$ について、 $r$ -MaxRICsがNP困難となること、さらに、 $P \neq NP$ を仮定した場合、任意の $\varepsilon > 0$ について近似率 $n^{1/6-\varepsilon}$ を持つ多項式時間アルゴリズムが存在しないことを示した。さらに、近似下界を $n^{1/2-\varepsilon}$ まで改善した。また、解サイズをパラメータとして導入した場合に、 $W[1]$ 困難(パラメータ困難)となることを示した。一般にはNP困難であるが、入力グラフの木幅パラメータを固定した場合には多項式時間アルゴリズムが設計できることを示した。

(2) オンラインOVSF符号割当問題には、例えば、無線通信やメモリ管理など、様々な応用があり、活発に研究されている。本研究課題では、利用可能な帯域幅の増加を許したオンラインOVSF符号割当問題に対して、 $2lg^*h$ 個の符号木を用いた $2$ -競合アルゴリズムを設計し、このアルゴリズムを拡張することにより、任意の $\alpha > 1$ に対して、 $(1 + \lfloor \alpha \rfloor)lg^*h$ 個の符号木を用いた $(1+1/\alpha)$ -競合アルゴリズムを提案した。ここで $h$ はOVSF符号木の高さである。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件)

1. Hiroshi Eto, Fengrui Guo, Eiji Miyano. Distance- $d$  Independent Set Problems for Bipartite and Chordal Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*. Vol. 27, pp. 88-99, 査読有, DOI: 10.1007/s10878-012-9594-4, (2014)
2. Yuichi Asahiro, Kenta Kanmera, Eiji Miyano.  $(1+\varepsilon)$ -Competitive Algorithm for Online OVSF Code Assignment with Resource Augmentation. *Journal of Combinatorial Optimization*. Vol. 26, pp. 687-708, 査読有, DOI: 10.1007/s10878-012-9454-2 (2013)
3. Yuichi Asahiro, Eiji Miyano, Toshihide Murata, Hirotaka Ono. Optimal Approximability of Bookmark Assignments. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 161, pp. 2361-2366, 査読有, DOI: 10.1016/j.dam.2013.05.018 (2013)
4. Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Takehiro Ito, Eiji Miyano. Complexity of Finding Maximum Regular Induced Subgraphs with Prescribed Degree. *Proceedings of the 19th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT2013)*, LNCS8070, pp. 28-39, 査読有, DOI: 10.1007/978-3-642-40164-0\_6 (2013)
5. Yuichi Asahiro, Yuya Doi, Eiji Miyano, Hirotaka Shimizu. Maximum Diameter-Bounded Subgraphs in Intersection Graphs. *Proceedings of the 16th Korean-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC2013)*, pp. 83-90, 査読有 (2013)
6. Yuichi Asahiro, Jesper Jansson, Eiji Miyano, Hirotaka Ono. Graph Orientations Optimizing the Number of Light or Heavy Vertices. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO 2012)*, LNCS7422, pp. 332-343, 査読有 (2012)
7. Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Eiji Miyano. Improved Inapproximability of Regular Induced Connected Subgraph Problems. *Proceedings of the 15th Korean-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC2012)*, pp. 161-168, 査読有 (2013)
8. Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, Eiji Miyano. Inapproximability of Maximum  $r$ -Regular Induced Connected Subgraph Problems. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E96-D(3), pp. 443-449, 査読有, DOI: 10.1587/transinf.E96.D.443 (2013)
9. Masao Kumamoto, Eiji Miyano. Optimal Distortion Embedding of Complete Binary Trees into Lines. *Information Processing Letters*, Vol. 112(19), pp. 365-370, 査読有, DOI: 10.1016/j.ipl.2012.02.003 (2012)
10. Yuichi Asahiro, Kenichi Kawahara, Eiji Miyano. NP-Hardness of the Sorting Buffer Problem on the Uniform Metric. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 160(10), pp. 1453-1464, 査読有, DOI: 10.1016/j.dam.2012.02.005 (2012)
11. Hiroshi Eto, Fengrui Guo, Eiji Miyano. Distance- $d$  Independent Set Problems

- for Bipartite and Chordal Graphs. Proceedings of the 6th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA2012), LNCS7402, pp. 234-244, 査読有 (2014)
12. Yuichi Asahiro, Jesper Jansson, **Eiji Miyano**, Hirotaka Ono. Upper and Lower Degree Bounded Graph Orientation with Minimum Penalty. Proceedings of Computing: The 18th Australasian Theory Symposium (CATS 2012), Vol. 128, pp. 139-146, 査読有 (2012)
  13. Yuichi Asahiro, Kenta Kanmera, **Eiji Miyano**.  $(1+\epsilon)$ -Competitive Algorithm for Online OVFS Code Assignment with Resource Augmentation. Proceedings of the 17th Annual International Conference (COCOON 2011), LNCS6842, pp. 259-270, 査読有 (2011)
  14. Yuichi Asahiro, Hiroshi Eto, **Eiji Miyano**. Inapproximability of Maximum  $r$ -Regular Induced Connected Subgraph Problems. Proceedings of the 2011 International Conference on Foundations of Computer Science (FCS2011), pp. 102-107, 査読有 (2011)
  15. Yuichi Asahiro, Jesper Jansson, **Eiji Miyano**, Hirotaka Ono, Kouhei Zenmyo. Approximation Algorithms for the Graph Orientation Minimizing the Maximum Weighted Outdegree. Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 22(1), pp. 78-96, 査読有, DOI: 10.1007/s10878-009-9276-z (2011)
  16. Yuichi Asahiro, **Eiji Miyano**, Hirotaka Ono. Graph classes and the complexity of the graph orientation minimizing the maximum weighted outdegree. Discrete Applied Mathematics, Vol. 159(7), pp. 498-508, 査読有, DOI:10.1016/j.dam.2010.11.003 (2011)
  17. Yuichi Asahiro, Jesper Jansson, **Eiji Miyano**, Hirotaka Ono. Graph Orientation to Maximize the Minimum Weighted Outdegree. International Journal of Foundation of Computer Science, Vol. 22(3), pp. 583-601, 査読有, DOI: 10.1142/S0129054111008246 (2011)
- [学会発表] (計 35 件)
1. 江藤宏. 弦 2 部グラフにおける正則誘導部分グラフ探索問題. 情報処理学会九州支部・火の国情報シンポジウム 2014, 2014 年 3 月 4 日~3 月 5 日, 大分大学(大分県).
  2. 朝廣雄一. 次数制約のあるグラフ有向化問題の近似について. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2013 年 12 月 20 日~12 月 21 日, 沖縄産業支援センター (沖縄県).
  3. 江藤宏. 正則誘導部分グラフを多項式時間で探索可能なグラフクラス. 日本 OR 学会九州支部第 4 回九州・中国・四国地区における若手 OR 研究交流会, 2013 年 10 月 26 日~10 月 27 日, きらら交流館 (山口県).
  4. 星加大輝. ターミナル数を限定した成分素シュタイナー木最大化問題の近似アルゴリズム. 日本 OR 学会九州支部第 4 回九州・中国・四国地区における若手 OR 研究交流会, 2013 年 10 月 26 日~10 月 27 日, きらら交流館 (山口県).
  5. 江藤宏. 木幅限定グラフにおける最大正則誘導部分グラフ探索問題の線形時間アルゴリズム. 第 66 回電気関係学会九州支部連合大会, 2013 年 9 月 23 日~9 月 24 日, 熊本大学 (熊本県).
  6. 竹田圭祐. 複数バッファによる整列問題. 第 66 回電気関係学会九州支部連合大会, 2013 年 9 月 23 日~9 月 24 日, 熊本大学 (熊本県).
  7. 土井悠也. 部分グラフクラスに対する最大  $d$  クラン問題. 第 66 回電気関係学会九州支部連合大会, 2013 年 9 月 23 日~9 月 24 日, 熊本大学 (熊本県).
  8. 田原慶輔. 追跡問題に対する進化アルゴリズムの提案. 第 66 回電気関係学会九州支部連合大会, 2013 年 9 月 23 日~9 月 24 日, 熊本大学 (熊本県).
  9. 江藤宏. 次数指定した最大正則誘導部分グラフ探索問題. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2013 年 9 月 3 日, 鳥取環境大学 (鳥取県).
  10. 江藤宏. 弦グラフにおける最大正則誘導部分グラフ探索問題の多項式時間アルゴリズム. 夏の LA シンポジウム 2013, 2013 年 7 月 16 日~7 月 18 日, 休暇村 志賀島 (福岡県).
  11. 土井悠也. グラフクラスと最大  $d$  クラン問題. 夏の LA シンポジウム 2013, 2013 年 7 月 16 日~7 月 18 日, 休暇村 志賀島 (福岡県).
  12. 竹田圭祐. 文字列の整列問題について. 夏の LA シンポジウム 2013, 2013 年 7 月 16 日~7 月 18 日, 休暇村 志賀島 (福岡県).
  13. 星加大輝. ターミナル数 5 の成分素シュタイナー木最大化問題に対する近似アルゴリズム. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2013 年 5 月 17 日~5 月 18 日, 小樽商科大学 (北海道).
  14. Yuya Doi. Maximum Diameter-Bounded Subgraphs in Graphs Without Long Induced Cycles. 6th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC13), 2013 年 4 月 19 日~4 月 21 日, Hotel Matsushima Taikanso (宮

- 城県).
15. 江藤宏. 弦グラフにおける最大正則誘導部分グラフ探索問題. 情報処理学会九州支部・火の国情報シンポジウム 2013, 2013年3月14日~3月15日, 熊本大学(熊本県).
  16. 星加大輝. ターミナル数限定成分素シュタイナー木最大化問題の近似アルゴリズム. 火の国情報シンポジウム 2013, 2013年3月14日~3月15日, 熊本大学(熊本県).
  17. 土井悠也. 弦グラフにおける直径限定部分グラフ最大化問題. 火の国情報シンポジウム 2013, 2013年3月14日~3月15日, 熊本大学(熊本県).
  18. 江藤宏. 次数を限定した平面グラフにおける誘導部分グラフ探索問題. 日本OR学会九州支部第3回九州地区における若手OR研究交流会, 2012年10月27日~10月28日, 北九州市立大学(福岡県).
  19. 郭豊瑞. 弦グラフ上での距離  $d$  独立頂点集合問題. 日本OR学会九州支部第3回九州地区における若手OR研究交流会, 2012年10月27日~10月28日, 北九州市立大学(福岡県).
  20. 星加大輝. ターミナル数を限定した成分素シュタイナー木最大化問題. 日本OR学会九州支部第3回九州地区における若手OR研究交流会, 2012年10月27日~10月28日, 北九州市立大学(福岡県).
  21. 江藤宏. 次数を限定した誘導部分グラフ探索問題. 夏のLAシンポジウム 2012, 2012年7月17日~7月19日, 宮津市(京都府).
  22. **宮野英次**. 距離  $d$  独立頂点集合問題の計算複雑さ. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2012年6月21日, 北海道大学(北海道).
  23. Fengrui Guo. Distance- $d$  Independent Set Problems. 5th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC12), 2012年4月21日~4月22日, Fudan University, Shanghai (China).
  24. Hiroshi Eto.  $W[1]$ -hardness of regular induced connected subgraph problems. 5th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC12), 2012年4月21日~4月22日, Fudan University, Shanghai (China).
  25. Hirotaka Ono. Minimizing Penalty on Upper and Lower Degree Constrained Graph Orientation. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2011年12月16日, 名古屋大学(愛知県).
  26. 朝廣雄一. 資源増加を許したOVSF符号割当問題に対する  $1+\epsilon$  競合アルゴリズム. 情報処理学会 アルゴリズム研究会, 2011年11月18日, 山口大学(山口県).
  27. 山田陽一. 対決ゲームモデルの紹介とそ  
の拡張. 日本OR学会九州支部第2回九州地区における若手OR研究交流会, 2011年10月29日~10月30日, 島原共同研修センター(長崎県).
  28. 江藤宏. 3-正則誘導部分グラフ問題の計算量. 日本OR学会九州支部第2回九州地区における若手OR研究交流会, 2011年10月29日~10月30日, 島原共同研修センター(長崎県).
  29. 郭豊瑞. Dispersion Problem に対するアルゴリズムについて. 日本OR学会九州支部第2回九州地区における若手OR研究交流会, 2011年10月29日~10月30日, 島原共同研修センター(長崎県).
  30. 田中清明. 辺数制約二部グラフマッチング問題に対するアルゴリズム. 日本OR学会九州支部第2回九州地区における若手OR研究交流会, 2011年10月29日~10月30日, 島原共同研修センター(長崎県).
  31. 江藤宏. 最大正則誘導連結部分グラフ問題のパラメータ化計算量. 2011年度電子情報通信学会九州支部学生講演会, 2011年9月28日, 佐賀大学(佐賀県).
  32. 田中清明. 辺数制約二部グラフマッチング問題に対する多項式時間アルゴリズム. 2011年度電子情報通信学会九州支部学生講演会, 2011年9月28日, 佐賀大学(佐賀県).
  33. 江藤宏. 頂点数を最大とする正則誘導連結部分グラフ問題の計算複雑さ. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, 2011年6月30日, 広島大学(広島県).
  34. Hirotaka Ono. Maximum Edge Domination Problem. 4th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC11), 2011年4月16日~4月17日, Hsinchu (Taiwan R. O. C.).
  35. Yuichi Asahiro. 2-Competitive Algorithm for Online OVFS Code Assignment with Small Resource Augmentation. 4th Asian Association for Algorithms and Computation Annual Meeting (AAAC11), 2011年4月16日~4月17日, Hsinchu (Taiwan R. O. C.).
- [その他]
- ホームページ等
- ① <http://theory.ces.kyutech.ac.jp/~miyano/publication-j.html>
  - ② <http://theory.ces.kyutech.ac.jp/~miyano/talk-j.html>
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
- 宮野 英次 (MIYANO, Eiji)
- 九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授
- 研究者番号: 10284548