

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 21 日現在

機関番号：10104

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23500341

研究課題名(和文) 離散及び連続変量の行動計量分析における漸近理論の適用

研究課題名(英文) Applications of asymptotic theory to data analysis in behaviormetrics with discrete and continuous variables

研究代表者

小笠原 春彦(Ogasawara, Haruhiko)

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：70271731

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：行動計量分析における関心の対象であるパラメータ等の統計的検定及び区間推定のためにはそれらに関連する各種統計量の分布に関する知識が必要であるが、多くの場合正確な分布を得ることは困難である。一方、統計的漸近理論を用いることにより、その近似を得ることが可能である、当研究では、離散及び連続変数が介在する行動計量における各種統計量の漸近展開を得た。

研究成果の概要(英文)：For statistical testing and interval estimation of unknown quantities like population parameters, the distributions of their associated statistics are required. However, their accurate values are often unavailable. On the other hand, using statistical asymptotic theory, their approximation can be obtained. In this study, asymptotic expansions of the distributions of the statistics are derived for data analysis in behaviormetrics using discrete and continuous variables.

研究分野：統計学

科研費の分科・細目：情報学、統計科学

キーワード：行動計量分析 漸近展開 キュミュラント 信頼区間 エッジワース展開 信頼区間

1. 研究開始当初の背景

行動計量分析においても漸近理論はこれまで広く使用されてきた。しかし、その多くは統計量が漸近的に正規分布に従うことを利用した水準にとどまっている。一方、現実の統計量の分布は有限なサンプルの大きさの下で、しばしば正規分布からかなりずれることが知られている。これらの近似を改善する方法が高次漸近理論による統計量の分布の漸近展開であるが、その利用は十分ではなかった。

2. 研究の目的

行動計量分析においては、関心の対象であるパラメータ等の推定量の分布の近似として漸近正規分布を、またモデルの評価のための適合指標である統計量の分布には漸近カイ自乗分布を用いることが一般に行われている。この研究では、観測変量が離散と連続の両者の場合のいくつかについて、漸近により正確な分布を漸近展開の方法により求め、区間推定の精度向上等に役立てることを目的とする。

3. 研究の方法

行動計量分析で関心のあるパラメータ等の推定量は、例えば共分散構造分析であれば、一般に標本分散共分散の関数であり、尤度比統計量も同様な関数とみなすことができる。この場合、関数関係は陰関数でしかないことが多いので、それを考慮した上で推定量のテーラー展開をもとめる。この結果から、連続観測変量の場合は非正規分布等の現実的な条件の下で推定量の漸近キュミュラントを導出する。

漸近展開は、漸近キュミュラントのうち実際に意味のある、漸近分散、漸近バイアス、漸近歪度、漸近尖度、漸近高次分散を用いた段階までのものを導出する。離散変数においても同様であるが、確率が構造化された多項分布があてはまることが多いのでこれを利用する。

4. 研究成果

(1) 非正規分布における一般的共分散構造に関する乖離関数の帰無分布の漸近展開

一般的な共分散構造モデルのための共通な性質を持つ乖離関数や適合指標の帰無分布の漸近展開を非正規分布の下で $1/n$ までの次数について行った。乖離関数には通常の正規理論による尤度比統計量と重み付/重み無し最小2乗推定の基準が含まれる。これらの乖離関数の関数としての適合指標の結果も与えた。漸近展開の導出のために標本分散共分散の同時分布の漸近展開が与えられた。

また漸近展開によらないパートレット補正の結果を与えた。

(2) 項目反応理論におけるリンキングに関する統計量に対する漸近展開の応用

共通項目・異集団リンクデザインにおけるリンク係数の分布の漸近展開を $1/n$ までの次数について行った。推定量の1組は基準集団の尺度への変換における勾配と切片の係数である。リンクのために項目反応モデルを仮定したが、モデルの誤特定がある場合とない場合のいずれにも当てはまる展開を行った。さらに、ステューデント化した推定量あるいは枢軸統計量の分布の漸近展開を導出した。数値例として2値データに対する2パラメータロジスティックモデルを用いたモーメント法によるリンク結果をシミュレーションとともに示した。

(3) 多母集団モーメント構造における漸近展開及びその線形化統計量への応用

多母集団の標本平均と任意の次数までの標本中心モーメントの関数の同時分布の漸近展開をエッジワース展開により求めた。帰無仮説及び固定対立仮説の下でのモーメント構造のパラメータの推定量の漸近分布及び固定対立仮説の下で分布に漸近的に依存しないカイ自乗統計量の漸近分布を上記の応用として得た。さらにカイ自乗統計量の帰無分布の漸近展開も導出した。カイ自乗統計量を導出するパラメータの推定量として、線形化推定量を通常の推定量とともに扱った。

(4) 標本多列相関係数の分布の漸近展開

多列相関係数及びそれに関連するパラメータに関して、これらが最尤推定により得られた場合の推定量の分布の漸近展開を $O(1/n)$ までの次数について導出した。漸近的な結果はいくつかの観察される変量と順序カテゴリーを表す離散変数に対応する、観測されないひとつの変数に関して多変量正規分布を仮定して求めた。推定された情報行列を用いてステューデント化した推定量の分布の漸近展開は通常の正規近似の次の次数の項まで行った。シミュレーションを含む数値例により、標本の大きさが有限な場合における漸近的な結果の正確さが示された。

(5) 標本キュミュラントと単調変換を用いたコーニッシュューフィッシャー展開

ステューデント化したパラメータの推定量について、高次漸近分散を含む4次までの漸近キュミュラントを求める一般的な公式を示した。この漸近キュミュラントの標本値を用いて、3次のオーダーまで正確なコーニッシュューフィッシャー展開を導出した。ステ

ューデント化した推定量の単調ないくつかの新しい変換の方式を提案した。さらに固定の正規偏差の単調な変換の方法をこれらと同じ次数の正確さまで求め、ステューデント化した推定量の変換の場合と漸近的な比較を行った。平均と二項割合への応用を後者の数値例とともに示した。

(6) 因子分析及び構造方程式モデリングにおけるパラメータの最小2乗解の分布の漸近展開

因子分析・構造方程式モデリングにおける各種最小自乗推定量の漸近分布を非正規分布の下で $O(1/n)$ のオーダーまでのエッジワース展開を用いて導出した。当論文で扱った推定量の第1のグループは非標準化観測変数にためのもので、正規分布を仮定した一般化最小自乗推定量、単純または尺度非依存最小自乗推定量、冪対角最小自乗推定量及び重みなし最小自乗推定量である。第2のグループは標準化観測変数にための重みなし最小自乗推定量である。提案した公式は対応する最尤推定量の場合にも成立することが示された。因子分析の場合のシミュレーションが実施され公式の正確さが確認された。また、正規分布を仮定したステューデント化統計量の非正規分布の場合について議論を行った。

(7) 多項分布において度数が0のセルがある場合の標本多項割合の関数の漸近キュムラント

多項分布の標本割合の関数について4次までの漸近キュムラントを、推定量がステューデント化されている場合とそうでない場合の両者について求めた。ここで標本割合に定数を付加する場合があることを考慮した。ステューデント化しない推定量のある漸近キュムラントは付加した定数に依存しないことが分かった。一方、ステューデント化した推定量の多くの漸近キュムラントは標本割合に定数を付加しない推定量のものと同一になった。ただし、これはステューデント化しない推定量の漸近分散の推定量を頻度が0のセルに適切に対応するように構成することが必要であった。特に定数が $O(1/n)$ の場合は、ステューデント化した推定量の4次までのすべての漸近キュムラントは、定数を付加しない推定量のものと同一になった。対数オッズ比とユールの係数を用いた数値例が示された。

(8) 項目反応理論における能力パラメータの推定量の分布の漸近展開

項目反応理論における能力パラメータの推定量とその変換の分布の漸近近似をテラードテストのように項目パラメータが既

知の場合に通常の正規近似を超えて導出した。その漸近近似のために推定量の4次までの漸近キュムラントと高次漸近分散をモデルの誤特定の場合を含めて求めた。能力の検定と区間推定が可能となる、4種類にステューデント化されたピボットの漸近キュムラントを得た。能力の推定区間のシミュレーションを含む数値例を3パラメータロジスティックモデルについて示した。

(9) 項目反応理論における能力パラメータのベイズ及び擬似ベイズ推定量の分布の漸近展開

項目反応理論における能力のベイズ及び擬似ベイズ推定量の4次までの漸近キュムラントと高次漸近分散をモデルの誤特定がありうる場合について求めた。これらの推定量は一般的なウェイトを持つ(疑似)ベイズ推定量の特殊な場合として扱われた。さらに、ステューデント化後の推定量の漸近キュムラントも導出した。平均自乗誤差の比較から標準正規分布を事前分布に用いたベイズモード推定量が点推定の場合に推奨された。しかし、区間推定ではステューデント化後の推定量のバイアスの小さい最尤推定量が推奨された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- (1) Ogasawara, H. (2013a). (査読有)
Estimation of ability with reduced asymptotic mean square error in item response theory. *Journal of The Japan Statistical Society*, 43 (2), 187-202.
- (2) Ogasawara, H. (2013b). (査読有)
Asymptotic properties of the Bayes modal estimators of item parameters in item response theory. *Computational Statistics*, 28 (6), 2559-2583.
- (3) Ogasawara, H. (2013c). (査読有)
Asymptotic cumulants of the estimator of the canonical parameter in the exponential family. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 143 (12), 2142-2150.
- (4) Ogasawara, H. (2013d). (査読有)
Asymptotic cumulants of ability estimators using fallible item parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 119, 144-162.
- (5) Ogasawara, H. (2013e). (査読有)
Asymptotic properties of the Bayes and pseudo Bayes estimators of ability in item response theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 114, 359-377.
- (6) Ogasawara, H. (2012a). (査読有)
Asymptotic expansions for the ability estimator in item response theory.

- Computational Statistics*, 27 (4), 661-683.
- (7) Ogasawara, H. (2012b). (査読有) Asymptotic cumulants of functions of multinomial sample proportions with adjustment for empty cells. *Behaviormetrika*, 39 (2), 211-241.
- (8) Ogasawara, H. (2012c). (査読有) Cornish-Fisher expansions using sample cumulants and monotonic transformations. *Journal of Multivariate Analysis*, 103 (1), 1-18.
- (9) Ogasawara, H. (2011a). (査読有) Asymptotic expansions of the distributions of the polyserial correlation coefficients. *Behaviormetrika*, 38 (2), 153-168.
- (10) Ogasawara, H. (2011b). (査読有) Asymptotic expansions in multi-group analysis of moment structures with an application to linearized estimators. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40 (9), 1701-1716.
- [学会発表] (計 2 2 件)
- (1) Ogasawara, H. (2013, December 17). Bias adjustment for minimization of the asymptotic mean square error. Conference on Role of Statistics in the Advancement of Science and Technology on the Occasion of Diamond Jubilee Year of the Department of Statistics & The International Year of Statistics, Pune University, Pune, India.
- (2) Ogasawara, H. (2013, November 9). Bias adjustment minimizing the asymptotic mean square error. Ishigaki International Conference on Modern Statistics Theories, Practices, and Education in the 21st Century, Ishigaki, Japan.
- (3) 小笠原 春彦 (2013年9月19日). IRTにおける能力の最尤およびベイズ推定量の漸近的性質, 日本心理学会第77回大会, 札幌コンベンションセンター・札幌市産業振興センター
- (4) 小笠原 春彦 (2013年9月11日). 漸近平均2乗誤差を最小化するバイアス調整, 2013年度統計関連学会連合大会, 大阪大学豊中キャンパス
- (5) 小笠原 春彦 (2013年9月5日). 項目反応理論における能力のベイズおよび擬似ベイズ推定量の漸近的性質, 日本行動計量学会第41回大会, 東邦大学習志野キャンパス
- (6) Ogasawara, H. (2013, August 22). Monotonic transformations for asymptotic expansions. Joint Meeting of the IASC Satellite Conference for the 59th ISI WSC and the 8th Conference of the Asian Regional Section of the IASC, Seoul, Korea (IASC = The International Association for Statistical Computing, ISI = The International Statistical Institute, WSC = World Statistics Congress).
- (7) Ogasawara, H. (2013, August 14). Bias adjustment minimizing the asymptotic mean square error. The 22nd International Workshop on Matrices and Statistics, Toronto, Canada.
- (8) Ogasawara, H. (2013, July 25). Asymptotic expansions with monotonicity. The 29th European Meeting of Statisticians, Budapest, Hungary.
- (9) Ogasawara, H. (2012, December 27). Monotonic transformations for the Cornish-Fisher expansion. Eighth International Triennial Calcutta Symposium on Probability and Statistics, Calcutta, India.
- (10) 小笠原 春彦 (2012年9月15日). 度数0の調整を伴う標本割合の関数の漸近キュムラント, 日本行動計量学会第40回大会, 新潟県立大学
- (11) 小笠原 春彦 (2012年9月11日). IRTにおける能力の最尤推定量の漸近キュムラント, 日本心理学会第76回大会, 専修大学 生田キャンパス
- (12) 小笠原 春彦 (2012年9月10日). 標本キュムラントと単調変換を用いたコーニッシューフイッシャー展開, 2012年度統計関連学会連合大会, 北海道大学高等教育機能開発センター (札幌市)
- (13) Ogasawara, H. (2012, August 28). Asymptotic expansions for the ability estimator in item response theory. The 20th International Conference on Computational Statistics (COMPSTAT 2012), Limassol, Cyprus.
- (14) Ogasawara, H. (2012, July 31). Asymptotic expansions for the pivots using log-likelihood derivatives with an application in item response theory. Joint Statistical Meetings (JSM2012), San Diego, USA.
- (15) Ogasawara, H. (2012, July 10). Asymptotic cumulants of functions of multinomial sample proportions with adjustment for empty cells. The 8th World Congress in Probability and Statistics, Istanbul, Turkey.
- (16) Ogasawara, H. (2011, December 29). Monotonic transformations using sample cumulants in asymptotic expansions. An International Conference: Statistical Concepts and Methods for the Modern World, Colombo, Sri Lanka.
- (17) Ogasawara, H. (2011, December 17). Asymptotic expansions of the distributions of the polyserial correlation coefficients. Joint Meeting of The 2011 Taipei International Statistical Symposium and 7th Conference of the Asian Regional Section of the IASC (International Association for Statistical Computing), Taipei, Taiwan.
- (18) 小笠原 春彦 (2011年9月15日). 多列相関係数の分布の漸近展開, 日本心

- 理学会第 75 回大会, 日本大学文理学部
- (19) 小笠原 春彦 (2011 年 9 月 13 日). 四分相関係数の分布に関する漸近展開, 日本行動計量学会第 39 回大会, 岡山理科大学
- (20) 小笠原 春彦 (2011 年 9 月 5 日). 対数尤度導関数によるピボットの漸近展開と項目反応理論への応用, 2011 年度統計関連学会連合大会, 九州大学伊都キャンパス
- (21) Ogasawara, H. (2011, July 21). Applications of asymptotic expansion in structural equation modeling: Mean and covariance structure analysis. Paper presented in the invited symposium: Aspects of structural equation modeling organized by H. Ogasawara at The 17th International Meeting of the Psychometric Society, Hong Kong.
- (22) Ogasawara, H. (2011, June 27). Cornish-Fisher expansions using sample cumulants and monotonic transformations. The 9th Tartu Conference on Multivariate Statistics, Tartu, Estonia.

[図書] (計 2 件)

- (1) Ogasawara, H. (2012). Asymptotic expansions of the distributions of the least squares estimators in factor analysis and structural equation modeling. In R. Chakraborty, C. R. Rao, & P. K. Sen (Eds.), *Handbook of statistics: Vol.28. Bioinformatics in human health and heredity* (pp. 163-200). New York: Elsevier.
- (2) Ogasawara, H. (2011). Applications of asymptotic expansion in item response theory linking. In A. A. von Davier (Ed.), *Statistical models of test equating, scaling, and linking* (pp.261-280). New York: Springer.

[その他]

ホームページ等

研究代表者

<http://www.res.otaru-uc.ac.jp/~hogasa/>

機関リポジトリ

<http://barrel.ih.otaru-uc.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小笠原 春彦 (OGASAWARA, Haruhiko)

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：7 0 2 7 1 7 3 1