

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 27 日現在

機関番号：14503

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23531192

研究課題名(和文) 数学的活動を取り入れた高大連携数学教材の開発と教員養成

研究課題名(英文) Development of Materials for Mathematical Activities in Cooperation between University and High school, and Teacher Education

研究代表者

濱中 裕明 (HAMANAKA, HIROAKI)

兵庫教育大学・学校教育研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20294267

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：近年特に重視されている数学的活動を高大連携の数学教材に取り入れ発展させることを出発点として、高校での数学的活動について数学教育学と数学の両面から考察した。

数学的活動としては、数学の実用的価値に重点をおいた応用指向の数学が考えられることが多い。しかし、数学の内容や考察そのものを面白いと思わせるような、主体的・能動的な考察活動を促す「構造指向の数学的活動」を考えることはできないか。

本研究では、そのような活動の枠組みを提案する。これは数学者の研究活動の縮図として設計されている。また、実践にむけた教材例を開発し、実践のなかでその効果や意義を検証した。

研究成果の概要(英文)：Recently, the importance of mathematical-activities has been increasing. We started to develop the materials for mathematical-activities in cooperations between an universities and a high-school, and we studied on mathematical-activities in high school mathematics from both side of Mathematical educations and Mathematics.

As the contents of mathematical-activities, the application-oriented mathematics, in which the functional value is emphasized, tends to be taken up. However, we propose the "structure-oriented mathematical-activity" that can induce the learner's proactive and dynamic considerations, and in which, the learner can value the contents and the considerations for themselves, not for their functional values.

In this study, we propose the model of such mathematical-activities, which is also a miniature of the researching activities of real mathematicians. Also we develop examples of materials for such activities and verify its effects and meanings in practices.

研究分野：数学、数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学的活動 高大連携

1. 研究開始当初の背景

従前より、教員養成課程における教科専門に関しては、理学部や文学部の内容のコンパクト化ではない独自性が求められるという意見には多くが賛同するところであり、「今後の国立の教員養成系大学学部在り方について」¹⁾では「教員が教科を通して教育活動を展開していくということを考えれば、『子どもたちの発達段階に応じ、興味や関心を引きだす授業を展開していく能力の育成』が教員養成学部の教科専門科目に求められる独自の専門性といえよう」と述べられている。

実際にその目的が十分に果たされているかという点については、懐疑的な意見が少なくないが(例えば、Wittmannはその著書²⁾の中で、「教師養成の見えない汚点：教科専門科目」と題し、「デューイの考え方によれば、現在教師養成課程における教科専門科目のあり方は、教師養成の改善に対する最大の障害である」とまで述べている)。しかし、少しずつではあるものの、数学者としての研究背景を持つ教員養成課程の教科専門担当教員による、教科専門の独自性の実現、そのあり方についての研究は進められてきている³⁾⁴⁾。本研究も、遠景としては、教員養成課程の教科専門、教科内容学のあり方、その独自の意義の実現を目指したものである。

理数離れという言葉が耳慣れて久しいが、近年は理数教育の推進、また、特色ある学校づくりを目指して、高等学校において理数クラスといった特別コース等が設置されることが珍しくない。そういったコースの特色づくりとして、高校が大学の研究者を特別講義の形で呼ぶことも多く行われており、自分も多数の講義を行ってきた。いわゆる数学離れが進むなか、通常の授業以外の特別講義により、数学の学習への意欲や関心を引き出したというねらいがあるようだが、実際にはねらい通りにいかないのが実情のようである。

1つには、いわゆる理学部的講義や、研究の概要を説明する講義では、高校生にとって、その内容を受け入れることが困難であり、上滑りであったり、返って興味を減退させたりすることになりかねないという実態がある。「数学的に面白い」という表現があるが、高校生と研究者では、当然「数学的に面白い」と感じる部分が異なる。この点でWittmannが「大学数学を学校数学へ翻案することは、普通考えられているほど簡単なことではない」と述べ、フロイデンタールに沿って「上からの数学専門」を批判した点はある意味、的を射ている。

また一方で、高度な数学へとつながる内容ではなく、興味や関心を引き出すという名目の元、単発的な話題、娯楽的な数学に偏ったとしても、学習への効果が期待できないという点も指摘できる。

幸いにして、これまでに自身の受け持った特別講義に関しては、好意的な評価を得て

はいるものの、上記のような課題に関しては、勘にたよって講義の課題を模索してきたのが実状であった。

このことに関して、ひとつキーワードになる事項として「数学的活動」がある。平成21年に告示された高等学校学習指導要領においても、重要なキーワードとして数学科の目標の冒頭に登場しているが、従来、自身が行ってきた特別講義でも、数学的な活動を常に取り入れてきた。

数学的活動に関して、学習指導要領では、数学の実用性および活動そのものの楽しさを強調しているが、これは市川伸一の述べる学習動機付けの2軸モデル⁵⁾に照らして考えると、数学の学習を外発的動機付けから内発的動機付けへ移行する途中経過に符合する。つまり、数学的活動の重要な意義の1つとして、数学の学習に対する内発的動機付けの促進があると考えられるのではないか。

以上のことを踏まえて、高大連携のための数学教材として数学的活動を効果的に取り入れ、生徒の学習への内発的動機付けを高めるような教材の開発の必要性を強く感じ、本研究を開始した。ここで目指したものは、上からだけでなく、下からだけでもない、大学数学への展望及び、生徒の理解と関心といった、両面からみた高大連携のための教材開発である。

- 1) 高等教育局専門教育課「今後の国立の教員養成系大学学部の在り方について(報告)」2001年11月22日
- 2) E.C.ピットマン著 國本景亀・山本信也訳「PISAを乗り越えて：算数・数学 授業改善から教育改革へ」2004年
- 3) 浪川幸彦「数学リテラシーを育成する数学教員養成カリキュラムの研究」基盤研究(B) 研究課題番号：20300255
- 4) 今岡光範「数学教育における数理的思考の広がりを図る研究」基盤研究(C) 研究課題番号：18530711
- 5) 市川伸一「学ぶ意欲の心理学」PHP新書 2001年

2. 研究の目的

本研究の具体的な目的は大きく3つに分けられる。

- (1) 数学的活動と生徒の内発的動機付けの関係の考察

数学的活動の意義やカリキュラムにおける位置づけについて理解を深め、生徒の内発的動機付けを促すという視点から、効果的な数学的活動の活用について考察する。また、その際は教科内容と教科教育の両面から総合的に研究する。

- (2) 数学的活動を効果的に取り入れた高大連携のため教材の開発

学問としての数学の体系を考慮しながら、高校での学習と関連づいた高大連携の

ための数学教材を、数学的活動を効果的に取り入れた形で開発する。また、実践のなかで、その効果を検証する。

(3) 数学的活動を取り入れた教材開発の教員養成への活用

このように数学的活動を取り入れた教材開発を考えると、そのような教材開発に携わることのできる能力こそ、この冒頭で述べた「生徒たちの発達段階に応じ、興味や関心を引きだす授業を展開していく能力の育成」そのものであり、教員養成において、教科専門が果たすべき主要な役割の1つである。そこで、これらの教材開発を遂行するために必要な能力とは何か、を明らかにし、教員養成でのカリキュラムに還元したい。

3. 研究の方法

本研究は、以下の4つの観点に基づいて進められてきた。

(1) 高大連携と数学的活動

文部科学省(2010)の調査によれば、平成22年4月の時点で大学との連携協議会等を設置している高等学校数は全国で955校と、平成18年度の590校と比べても随分と増加しており、高等学校の特色ある学校づくりの一つとして、高大連携は盛んに行われていることがうかがえる。こうした取り組みは、中等教育と高等教育のギャップを埋める手段として期待されている一方で、現在ますます増加する高大連携事業の一部の内容に疑問をもつ向きもある。本来、高大連携は何を目指して何を成すべきなのか、その在り方に照らして、数学的活動の意義を考えることを初めの観点とした。

(2) 数学的活動と内発的動機づけ

数学的活動を、未知なる活動への単純な興味・関心というレベルから、活動内容について進んで考察する意欲・態度へと引き上げていくにはどうすればいいのか。とくに、学習の内発的な動機づけとの関わりから数学的活動として目指すべきことを、数学教育的な視点から検討する。

(3) 数学的活動の教材の開発

上記の(2)において検討した数学的活動の枠組みに基づいて、数学を専門とする側の知見から、具体的な活動の題材を選定し、授業実践として開発し、その効果について授業実践のなかで検証すること。

(4) 教員養成への還元

上記のような数学的活動の教材開発を行うにあたっては数学教育的な視点と数学の教科内容に関する知見が融合した形で発揮される必要がある。そこに必要なスキルこそ、教員養成の場で培っていく必要のある素養であると考えられる。可能ならば、上記のような教材開発を遂行する能力をはぐくむための教員養成カリキュラムを検討したいと考えた。

4. 研究成果

(1) 高大連携と数学的活動について

平成23年度は、高大連携の在り方に力点を置いた。特色ある学校づくりの一環として、近年盛んにおこなわれている高大連携事業であるが、内村(2007)は「大学教員による出張講義の実態をいろいろと調べてみると、高大連携が目指すべき目的とかけ離れているものが散見された。特に、業者任せの出張講義では、なぜそのような講義をするのかという必然性があいまいで、日常の授業との文脈とは無関係に、イベント的・請負的に講義が組まれている例がほとんどであった」と述べ、高大連携事業の自身に疑問を呈している。

翻って、講義を任される大学教員・数学者側の立場からみれば、その教材の視点は自分の研究テーマや関連する話題の面白さを伝えたいという視点が強い。本来はその視点は歓迎すべきものだが、一般に、研究内容を学校数学に翻案しその面白さを高校生に伝えることは困難である。

このように高大連携事業の在り方を考察していくと、事業への大学側の参加者は高校数学の教育内容と研究レベルの数学の内容の両者に通じ、中等教育に関する知識をもつ必要がある。つまり、教員養成系学部の教科専門の重要な役割の一つがここにあると指摘できる。

また単なる講義の丸投げといった一方的な高大連携事業ではなく、自主的で双方向性のある高大連携を行うには、教育活動の改善に向けた意識、つまり、教育現場の課題意識が重要である。この点で、近年重視されている数学的活動およびその具体化としての「課題学習」の教材開発には、高校側にはニーズ、教員養成系大学側には果たすべき役割があり、あるべき高大連携の中心的テーマとなることを指摘した。

(2) 数学的活動と内発的動機づけ

平成24年度は、高校における数学的活動の意義や内容についての考察を進めた。

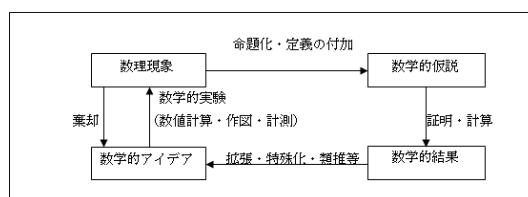
これまで述べてきたように、平成20年から21年に告示された小学校・中学校・高等学校の学習指導要領では、算数科・数学科の目標の冒頭に「数学的活動を通して」といった文言が置かれており、各校種を通じて算数的・数学的活動が強く重視されている。高校では特に数学的活動を重視した内容として「課題学習」を「数学Ⅰ」、「数学A」で必ず行うとこととされているが、学習指導要領解説にある数学的活動の図等を見ると、何らかの事象を数学化し、数学的に考察して解決したのち、それをまた事象へと還元していくといった、数学的モデリングに近い図となっており、応用指向的な数学の方法の強調が感じとられるものとなっている。Wittmann は、数学において「応

用指向」と「構造指向」という2つの相補的側面を指摘し、数学教育においてこの2つの側面のバランスの重要性を説いている。確かに、これまでのわが国の数学教育において「構造指向」が重視されすぎていたのではないかという反省にたち、応用指向的な数学の方法への取り組みという点に数学的活動を積極的に用いていくことも重要であるが、しかし一方で、構造指向の数学もまた応用指向の数学と同等に強調されなければならない。そして、バランスを保つための構造指向の強調とは、単に従来の構造指向型授業を推し進めるということではないはずである。本研究では、数学的活動を構造指向の数学的文脈のなかで用い、その中で、単なる活動としての楽しさではなく、また、数学の有用性に訴えるのでもなく、そこから数学的な考察活動そのものの楽しさを味わうことを重視した授業の開発を目指した。

例えば阿部(2009)は、日本の数学教育の歴史を振り返り、昭和40年代の数学教育の「現代化」において極端に強調された数学という客体から、子どもという主体へと焦点を移すことが「問題解決」という数学教育の方法の理念的背景であったと指摘し、しかしながら問題解決の授業において構造指向が強調されてきたならば、「理念的には主体に焦点化されて導入された問題解決であったが、その教授・学習の焦点は客体である数学に焦点があり、その意味で主客の乖離が存在する」と指摘している。この「主客の乖離」とは、数学に対する学習の動機づけのことではないか。上述のように数学の考察の楽しさを焦点とした「構造指向の数学的活動」によってこの乖離に有効な手立てを講じることができないかと考えたのである。実際、市川伸一(1995)による学習動機の2要因モデルを参照すると、目的意識をもった主体的活動としての数学的活動を重視する現在の学習指導要領は、より内発的な学習動機を学習者のなかで高めていくことを目指していると読み取ることができる。すなわち、数学を現実に応用しようとする応用指向に焦点を当てた数学的活動により実用志向の学習動機を刺激すること、および、知的好奇心を引き起こすような数学的活動により充実志向の学習動機を刺激すること、この2つが求められているといえる。

そして、内発的学習動機を高めるような、考察活動そのものへの興味に基づく数学的活動の教材・授業の設計のために、Wittmannによる本質的学習場や飯島(1988)による数学の指導における実験に注目し、これらの先行研究をもとにして、構造指向の数学的活動のサイクルモデルを提示した。実はこのモデルは、数学者の研究活動の縮図でもある。数学者の研究の起点となるのは、何らかの数学的アイデアである。それは何か

既知の数学的結果からの類推であったり、拡張であったりするが、具体的に定式化されたものではなく、インスピレーションや課題意識といった程度のことも多い。そして、得てしてこの起点となるアイデアを見つけることは難しく、そこには不連続な発想の飛躍が必要となる場合が多い。数学的なアイデアは、数学的な実例の計算等によって確かめられ、定義を付加したり、命題化したりすることで数学的仮説(予想)となる。もちろん、数学的仮説が、数学的に証明されれば、それは数学的な研究成果となり、次の数学的アイデアを生むための素となる。このサイクルを縮図化して、数学的活動における一つのモデルとしたのである。



さらに、学習動機の観点から、数学的活動に、学習者と数学の乖離の改善という意義を持たせるならば、活動場面において数学的な題材に対する学習者の取り組み方が重要になってくる。そのような学習者の数学への対峙の仕方自体を扱う理論として、フランスを期限とする数学教授学における教授学的状況理論がある。平成25年度は、教授学的状況理論の視点も用いながら、本研究で提案した構造指向の数学的活動モデルに基づいた授業実践を考察し、学習者の数学に対する取り組み方の改善という機能について検討した。

(3) 数学的活動の教材の開発

では、上述のような「構造指向の数学的活動」のための題材や実践を実際に開発するにはどのようにすればよいだろうか。本研究では、まず題材開発のための視点を次の4つに整理した。

視点1．そこに意外性のある発見があること：学習者を主体的・能動的な探究へと誘う契機となるのは、数理現象のなかから学習者が見出す発見である。つまりそこには、数学的に興味深く、学習者にとっても魅力的な発見が含まれる必要があり、また、その発見は学習者が見出すことができるレベルのものである必要がある。

視点2．そこから考察へとつながる内容であること：数学的活動は、単なる活動ではなく、数学的な学習の一環としてなされるのであるから、発見は適切な考察へとつながるものでなければならない。つまり実験等の外的活動が、学習者の内的考察へと導かれる必要がある。そのために、発見された内容は意外性があるだけでなく、適切な学習内容と結びついていて、また、適度な

難易度の方法によって解決できるものである必要がある。

視点3：さらなる探究活動へとつながるものであること：研究活動の縮図として設計されたこの数学的活動モデルにおいては、活動全体が一つの教授内容として閉じたものではなく、学習者が自分だけの考察を深めたり、そこから作品化したりできるものを目指したい。学習者が個々に考察を深めることが出来れば、それは考察内容を発表したり表現したりする意欲へとつながるであろうし、発表を共有する場を設定することもできよう。

視点4：抽象と具体をつなぐものであること：高校での数学の学習内容は、抽象度が高く、学習者にとって実感を伴わない内容であるといわれる。数学の実用性を訴える、数学的モデリングや応用指向の数学的活動も、この点を意識して提案されているといえよう。しかし、抽象的・具体的という言葉は、実は相対的な概念である。例えば、数学を研究する者は「この関数を具体的な式の形で書けば」などという表現を用いることがある。数学に携わらない者からみれば、関数の式が与えられても、それはまったく具体的ではないであろうが、これは具体的・抽象的という語の相対性によるものである。高校の学習内容においても、その抽象性を緩和し実感を伴わせるという点では、現実の問題まで具体性を持ち出さずとも、数学的な具体例を考察したり、数学的な実験を行ったりすることで、可能な部分があると思われる。つまり、構造指向の数学的活動においても、数理現象を直接に実測したり計算したりするなかで、抽象的な学習内容に実感を持たせるという意義を持たせたい。

以上の視点をもとに、本研究では多面体に関する題材を開発し、構造指向の数学的活動のサイクルモデルに基づいた授業実践を行った。その結果の検証により、以下のような示唆が得られた。

・本研究で行った構造指向の数学的活動の中に含まれる、自分たちで行う発見、考察、探究というサイクルは、内発的な学習動機付けを刺激することについてかなり有効に働くこと。

・そのような構造指向の数学的活動のための題材として、本研究で提案した多面体に関するテーマは、かなり効果をあげたこと。
・その場合、かならずしも自分自身が発見や証明を見いだせずとも、自分で考える時間を十分にとることで、充実感や達成感を得ることができること。

・一方で、一部の高校では、単に作業としての活動が、考察よりも楽しかったという声もあり、対象となる生徒にあわせて適切な課題を用意しないと必ずしもクラス全体に対して効果的とは言えない場合があること。

・本実践の構造指向の数学的活動を通して、知ること、覚えることを重視する数学の学習態度から、予想する・理由を考えるといった数学の探究活動につながる学習態度へと転換を促すきっかけとなりうるということが分かったこと。

(4) 教員養成への還元

教員養成課程への還元については、研究としての成果を上げるには至らなかったが、上記のような研究の成果を個人的な実践として、学部課程でのゼミや授業、大学院修士課程での講義等への還元は行うことができた。研究成果としてまとめるには至っていないが、例えば、解析学や代数学にかかわる「電卓を用いた数学教材」や平面幾何や2次関数の最小問題とかかわる「砂山を用いた実験教材」等の題材に関する探究活動を通して、数学科の教科内容と教科教育を融合したゼミを展開してきた。今後、数学的活動の教材開発という視点から、教員養成課程における数学科教科専門課程の育成すべき能力を整理したり、さらに具体的な養成課程の内容としてまとめたりすることは今後の課題としたい

参考文献：

- 阿部好貴(2009)、「問題解決から数学的活動へ：その架け橋としての数学的リテラシー」,日本科学教育学会『年会論文集』33, pp.111-114 .
市川伸一(1995)、「学習動機の構造と学習観との関連」,日本教育心理学会『第37回総会発表論文集』, p.177 .
飯島康男(1988)、「算数・数学の指導に取り入れる実験の意義」,日本数学教育学会誌『数学教育学論究』49・50, pp.3-27 .

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計2件)

濱中裕明, 加藤久恵, 高校における構造指向の数学的活動に関する考察 教授学的状況理論の視点から, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 査読有り、第20巻第1号, 2014年1月, pp.133-142

濱中裕明, 加藤久恵, 高校における構造指向の数学的活動に関する考察, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 査読有り、第19巻第1号, 2013年1月, pp.27-36

〔学会発表〕(計5件)

濱中裕明, 加藤久恵, 高校における構造指向の数学的活動に関する考察, 全国数学教育学会 第39回研究発表会(学会奨励賞受賞記念講演), 2014年2月1日, 広島大学教育学部

濱中裕明，加藤久恵，高校における構造指向の数学的活動に関する考察 教授学的状況理論の視点から ，全国数学教育学会 第 38 回研究発表会，2013 年 6 月 23 日，香川大学教育学部

濱中裕明，加藤久恵，高校における構造指向の数学的活動に関する考察 多面体に関する授業実践をとおして ，全国数学教育学会 第 37 回研究発表会，2013 年 2 月 2 日，広島大学教育学部

濱中裕明，加藤久恵，高校における構造指向の数学的活動について，全国数学教育学会 第 36 回研究発表会，2012 年 6 月 24 日，岡山大学教育学部

濱中裕明，加藤久恵，数学的活動を含めた高大連携数学教材開発について，近畿数学教育学会 第 51 回近畿数学教育学会，2012 年 2 月 18 日，奈良教育大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

濱中 裕明 (HAMANAKA HIROAKI)

兵庫教育大学大学院・学校教育研究科・准教授

研究者番号：20294267

(2) 研究分担者

加藤 久恵 (KATO HISAE)

兵庫教育大学大学院・学校教育研究科・准教授

研究者番号：00314518

(3) 連携研究者

(無し)