様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 9 月 28 日現在

機関番号：11501
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2014
課題番号：23540005

研究課題名（和文）退化超幾何関数と半単純リー群の離散系列表現の行列係数の関係の解明

研究課題名（英文）Understanding of the relation between degenerate hypergeometric functions and the matrix coefficients of the discrete series representations of semi simple Lie groups

研究代表者
早田　孝博（Hayata, Takahiro）

山形大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：50312757

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：実階数が1である特殊ユニタリ群SU(3,1)は(反)正則離散系列表現と大離散系列表現をもっている。正則離散系列表現の行列係数は古典的な結果がある。この研究では大離散系列表現の
極小K型における行列係数の動径成分を一般化された超幾何関数で表した。またパラメータの退化も考察し、動径成分上の関数として対数関数と二項係数および有理式を用いた表示を得た。

研究成果の概要（英文）：The special unitary group SU(3,1) of index (3,1) which is real rank 1 has so called the large discrete series representation as well as the (anti-)holomorphic ones. The matrix coefficients of the holomorphics are well known. In this study,
we obtained the radial part of the matrix coefficients of the large discrete series at the minimal K types using generalized hypergeometric functions. We also revealed that these are actually a combination of logarithm function and the rational functions with binomial coefficients by way of degeneracy of parameters.

研究分野：整数論

キーワード：半単純リー群　超幾何関数　行列係数　離散系列

１．研究開始当初の背景

(1) エルミート型半単純リー群に付随する有界対称領域上定義される保型カスプ形式は各ウェイトを決めるごとに有限次元ベクトル空間をなす。そのベクトル空間の次元の明示公式またはその上下からの評価は多くの研究者が興味を持っており、多くの研究結果がある。特に実階数が 1 のリー群に付随する正則保型形式やジーゲル保型カスプ形式のときなど明示公式がさまざまな場合に知られている。

一方で、非正則保型形式の場合はその核関数が具体的に知られていないため、計算可能な次元公式は知られていない。それに対し、代表者らの研究（[Hayata 他 ④]）で符号が(2,2)型のエルミート形式に付随する特殊ユニタリ群の中間離散系列表現の行列係数が得られている。それを踏まえ正則でない保型形式の場合へのアプローチとして、核関数を具体的に構成すること、さらにその先の研究としてゴードマンの跡公式を計算すること、などが問題であった。

(2) 保型形式の次元の評価に関しては、（一般化された）エルミート定数との関係がよく知られており、 [Yuen-Poor ②] およびその後の論文などで議論されている。一方で、渡部隆夫氏による代数群におけるエルミート定数の定義が 2003 年に行われた。

一般線形群の場合にはボロノイ理論として知られている方法により、エルミート定数を求めるアルゴリズムが知られている。これはパーフェクト格子をいかに求めるかが鍵となる。それ以外、例えばシンプレクティック格子の場合などはパーフェクト格子の研究が深まっていないため、求めるアルゴリズムが無いのが現状であった。

２．研究の目的

(1) 半単純リー群の離散系列表現に付随する行列係数を、保型形式の次元の計算に使えるように、できるだけ具体的な計算が可能な形式で記述する。

(2) 保型形式の次元の評価を目的として、一般化されたエルミート定数を求めるアルゴリズムを確立することを模索する。

３．研究の方法

(1) 勾配型微分作用素から得られる両側シフト作用素を、半単純リー群の離散系列表現に付随する極小 K 型における行列係数に作用させると、K 型の性質から、その動径成分の満たすベクトル値の微分方程式が得られる。これは④など先行研究の結果から、確定特異点型の超幾何微分方程式になることが期待される。これを求めたあと、次の段階として、行列係数の単位元における正則性を利用して一次元分の解を構成する。

さらに、離散系列表現に由来しているという設定から整数パラメータを含む超幾何微分方程式だと考えられるので、パラメータの退化が期待される。いわゆる退化超幾何関数の明示公式（[Vidunas ①]の結果）を利用することにより動径成分上の解関数の一意的な表示を求める。

(2) 保型形式の次元の評価を目的の一つとして、一般化されたエルミート定数を計算することに役立つように、（一般化された）パーフェクト格子にあたるものを何らかの形で定式化し、求めるアルゴリズムを模索する。

有界対称領域がジーゲル上半空間のときには、その基本領域は Siegel によって求められている。さらに２次のジーゲル上半空間のときには、[Gottschling ③] によって境界方程式がすべて求められている。これらの定義方程式は６変数多項式である。したがって実代数幾何的に、境界の定義イデアルをグレブナー基底を用いて表し、その代数的集合のうち実数座標をもつものとして交点を求めることが可能である。これらの計算を遂行するには、計算機による分散処理を考慮した、効率的なプログラミングが必要である。いろいろな数式処理システムも援用して、それらについての情報を集める。

４．研究成果

(1) 符号(3,1)型のエルミート形式に付随する特殊ユニタリ群 SU(3,1)は、（反）正則離散系列の他に大離散系列表現を一つ持つ。大離散系列の行列係数について、その極小 K 型における動径成分を一般化された超幾何関数による表示を得ることができた (雑誌論文①)。

この表示のパラメータをさらに詳細にみることにより、一般に、対数関数と二項係数を持つ有理式で表示することができることがわかる。雑誌論文①では、すべてのパラメータの場合において [Vidunas ①] の退化超幾何関数における公式を用いて表示することができた。

なお、正則離散系列のときも同様の計算が一般の(n,1)型のユニタリ群 SU(n,1) で可能で既存の結果と同じものが得られることが確かめられた。この計算は実階数が 2 である(2,2)型の特殊ユニタリ群 SU(2,2) の中間離散系列の場合にも、同じタイプの表示が得られることはすでにわかっている。ただし、この場合はいくつかのテストケースでは明示的に有理式部分とその二項係数を求めることができたが、一般的な明示的記述までは求められなかった。

(2) Poor-Yuen の議論などによりジーゲル保型カスプ形式の次元の評価に、（一般化された）エルミート定数の計算が寄与することが知られている。この研究の過程において、一般化されたエルミート定数と基本領域の関係が渡部隆夫らの研究（[Watanabe ⑤]）に

よって例示されていることを知ることができた。そのことから基本領域の頂点を求めることに興味を覚えた。

研究成果として以下のことが挙げられる。まず次数２のジーゲル対称領域の基本領域が[Gottschling ③] の結果によって 28 枚の超曲面で構成される。このことを利用して定義多項式のなすイデアルの零次元性で零セルを定義した。さらに計算機を用いて、それらが 180 個あることをグレブナー基底の計算と総当たり法を用いて決定した（雑誌論文②）。グレブナー基底の計算は数式処理システムである asir を利用した。([⑦])

それら零セルは、さらに 40 個の Sp(2,Z) 同値類へ分類される。これは、最小ベクトルアルゴリズムを援用して計算することができる。さらには固定化部分群の位数も求められる。これは Gottschling らの先行結果と一致する。この結果は発表予定である。

(3) 簡約理論の立場からはこれらは一般化されたリシュコフ領域（[Watanabe ⑥]）の頂点を表すものであると期待される。一般線形群 GL(n,R)におけるボロノイ理論を、シンプレクティック群において展開し、エクストリーム形式、さらには、パーフェクト形式にあたるものを考察したと解釈される。実際に、ボロノイ理論における最小ベクトルにあたるものも、雑誌論文②で得られた零セルそれぞれについて、再度最小ベクトルアルゴリズムを巧妙に適用することにより求めることができる。この結果も発表予定である。が、この研究で定義した零次元性によるパーフェクト格子の定義と、いろいろな定義（最小ベクトル数の極大性によるもの、接空間における基底によるもの、などなど）の同値性が証明されていないなど、パーフェクト性についての理論はまだまだ整備されていない。特に、これらは一般化されたエルミート定数を実際に与える点（エクストリームな点）を含むかどうか、これだけからは今のところ証明できていない。ともあれ、今後の研究の発展のための一つの提案を行ったものだと評価されると思う。

今後の展望としてボロノイ理論における最小ベクトルの計算に対応するものを正しく定式化し、パーフェクト格子との関係を明らかにすることが考えられる。そしてリシュコフ領域上の零セルを計算し、その Sp(2,Z) 同値類を計算することなどが考えられる。また同様の手法を神野五月氏による Sp(3,Z) に対する研究を発展させることも期待される。

＜引用文献＞

① Vidunas, R., “Degenerate Gauss hypergeometric functions”, Kyushu J. Math., 61(1) (2007) pp. 109-135.

② Poor, C. and Yuen, D. S., “Estimates for dimensions of spaces of Siegel modular cuspforms”, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 66 (1996) pp. 337-354.

③ Gottschling, E., “Explizite Bestimmung der Randflaechen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades”, Math. Ann. Vol. 138 (1959) pp. 103-124.

④ Hayata, Takahiro and Koseki, Harutaka and Oda, Takayuki, “Matrix coefficients of the middle discrete series of SU(2,2)”, J. Funct. Anal. Vol. 185(1) (2001) pp. 297-341.

⑤ Watanabe, Takao, “A survey on Voronoi 's theorem” in “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables (Hamahata, et. al. ed.)”, Series on Number Theory and Its Applications Vol. 7, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2012) pp. 334--377.

⑥ Watanabe, Takao, “Ryshkov domains of reductive algebraic groups”, Pacific J. Math. Vol. 270(1), (2014) pp. 237-255.

⑦ 野呂正行・横山和弘「グレブナー基底の計算基礎編、計算代数入門」東京大学出版会 (2003).

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

① Takahiro Hayata, Harutaka Koseki, Tadashi Miyazaki and Takayuki Oda, “Matrix coefficients of discrete series representations of SU(3,1)”, Journal of Lie Theory Vol. 25, No. 1, (2015) pp. 271--306, 査読有, URL: http://www.heldermann.de/JLT/JLT25/JLT251/jlt25014.htm.

② Hayata, Takahiro, Oda, Takayuki and Yatougo, Tomoki, “Zero cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2”, Experimental Mathematics vol. 21 No. 3 (2012) pp. 266--279 査読有, DOI 10.1080/10586458.2012.653273.

③ 早田 孝博、「Theta 対応に現れる Cohomological 表現」, 第 19 回整数論サマースクール報告集「保型形式のリフティング」(2012) pp. 290--301 査読無.

〔学会発表〕（計 5 件）
① 発表者:早田 孝博、
発表表題：“Introduction to derived functor modules; the cases of GL(n;C), of GL(n;R)”、
学会等名：“Workshop 2014 Structure of L^2(H＼G) ---local Galois case---"、
発表年月日: 2014 年 3 月 28 日、
発表場所: 岡山大学理学部２号館合同演習室（岡山市）

② 発表者:早田 孝博、
発表表題：“0-cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2”、
学会等名: 第 14 回オータムワークショップ「Reduction Theory and application to automorphic forms 10/31--11/5」、
発表年月日: 2011 年 11 月 1 日、
発表場所: 白馬ハイマウントホテル（長野県・白馬村）

③ 発表者: 早田 孝博、
発表表題: 「Gottschling による二次ジーゲル基本領域の記述について」、
学会等名: 東北大代数セミナー、
発表年月日: 2011 年 10 月 27 日、
発表場所: 東北大学数学棟２０８（仙台市）

④ 発表者: 早田 孝博、
発表表題：「theta 対応に現れる cohomological 表現」、
学会等名: 第 19 回整数論サマースクール 2011「保型形式のリフティング」、
発表年月日: 2011 年 9 月 9 日、
発表場所: 富士箱根ランド スコーレプラザホテル（静岡県・函南町）

⑤ 発表者:早田 孝博、
発表表題: 「Sp(2,Z)の基本領域の 0-cells について」、
学会等名: 「有界対称領域の算術商のコホモロジーとモジュラー・サイクル」、
発表年月日: 2011 年 8 月 7 日、
発表場所: 東京大学数理科学研究科玉原セミナーハウス（群馬県・沼田市）

６．研究組織
(1)研究代表者
早田 孝博（HAYATA, Takahiro）
山形大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：50312757

(3)連携研究者
織田 孝幸（ODA, Takayuki）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：10109415

古関 春隆（KOSEKI, Harutaka）
三重大学・教養教育機構・教授
研究者番号：60234770