

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 2 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540021

研究課題名(和文) モジュラー群の巾零完備化のモチーフ的構造

研究課題名(英文) Motivic structure of nilpotent completions of modular groups

研究代表者

市川 尚志 (ICHIKAWA, Takashi)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20201923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：代数曲線やアーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何的研究を進めて、次の成果を得た。  
1. 楕円モジュラーモチーフにおけるヘッケ作用素の理論を構成し、その応用として多重モジュラーL値の代数性を示した。  
2. リジッド解析を用いて、アーベル多様体がヤコビ多様体になるための条件、すなわちショットキー問題の解を与えた。  
3.  $p$ 進ベクトル値ジーゲルモジュラー形式の基礎理論を構成し、志村による概正則ベクトル値ジーゲルモジュラー形式の $p$ 進版を与えて、そのCM点における代数性を示した。  
4. 数論的ショットキー一意化理論を用い、3次元双曲多様体の幾何的ゼータ関数について、その特殊値の数論性を示した。

研究成果の概要(英文)：By studying arithmetic geometry of algebraic curves, abelian varieties and their moduli spaces, we obtained the following results. 1. We constructed a theory of Hecke operators on elliptic modular motives, and as its application, we showed the algebraicity of multiple modular L-values. 2. Using rigid analysis, we gave a solution to the Schottky problem, namely a condition that abelian varieties become Jacobi varieties. 3. We constructed a basic theory of  $p$ -adic vector-valued Siegel modular forms. Further, we gave  $p$ -adic versions of Shimura's nearly holomorphic vector-valued Siegel modular forms and showed the algebraicity of their values at CM points. 4. By using the arithmetic Schottky uniformization theory, we showed the arithmeticity of the special values for geometric zeta functions of hyperbolic 3-manifolds.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何 代数曲線 アーベル多様体 モジュライ空間 ショットキー問題 モジュラー形式 ゼータ関数

## 1. 研究開始当初の背景

本研究に関連する主な動向としては

(1) Grothendieck により提唱され、中村, Schneps 等により研究された、Teichmüller モジュラー群のなす系を記述する、いわゆる Teichmüller レゴゲームに関する予想

(2) Deligne, Hain 等による、代数多様体の基本群の巾零完備化が持つモチーフ構造の研究

(3) Deligne, Goncharov, Hain, Matsumoto, Terasoma 等による、種数 0 の Teichmüller モジュラー群の巾零完備化に関する混合 Tate モチーフ理論による研究と、非可換 Galois ガロア表現と多重ゼータ値への応用

(4) Manin による、多重モジュラー L 値に関する非可換モジュラーシンボルや反復積分表示を用いた研究

が挙げられる。

研究代表者は今まで、上記(3)の結果を正種数の Teichmüller モジュラー群の場合に拡張することを目指してきたが、近年上記(2)の結果を基に、楕円モジュラー群の巾零完備化の尖点部分についても、拡張された Hecke 作用素の理論が成り立つことを見出し、この場合のモチーフ構造の分解を得ることにより、上記(4)の結果を数論幾何的に発展させることができた。この方向をさらに進展させると共に、上記(1)のプランをモチーフ理論において実現し、Teichmüller モジュラー群に関する数論幾何的研究を進めることを目標とした。

## 2. 研究の目的

モジュラー群の(相対)巾零完備化の持つモチーフ構造を研究し、数論幾何に新しい知見をもたらす。具体的には、

(1) 楕円モジュラー群の巾零完備化から生ずるモチーフである楕円モジュラーモチーフを、Hecke 作用素の理論を用いて調べ、合同関係式とモチーフ的分解の存在について調べる。

(2) 上記(1)の結果を基に、楕円モジュラーモチーフから生ずる Galois 表現と周期積分の具体的な表示を与え、多重モジュラー L 値の代数性について研究する。

(3) 楕円モジュラーモチーフの非可換モジュラーシンボルによる記述を与え、Hecke 作用素の計算に応用し、多重モジュラー L 値やモジュラー曲線上の因子周期の計算を行う。

(4) Teichmüller モジュラー群の相対巾零完備化から生ずる Teichmüller モジュラーモチーフに対し、Teichmüller のレゴゲームが成り立つことを示す。

(5) 上記(3)と(4)の結果を用い、Teichmüller モジュラーモチーフに関する Galois 表現と周期積分の具体的表示を与える。

## 3. 研究の方法

(1) 研究分担者 宮崎誓氏、寺井直樹氏と共同して、モジュラー曲線の数論幾何的性質を調べ、その基本群である楕円モジュラー群の巾零完備化(楕円モジュラーモチーフ)上に Hecke 作用素の理論を構成する。さらにこの Hecke 作用素が合同関係式を満たすことを示し、Hecke 作用素を用いた楕円モジュラーモチーフの分解を与える。

(2) 研究分担者 上原健氏と共同して、楕円モジュラーモチーフの非可換モジュラーシンボルによる記述を与え、Hecke 作用素の計算を行うことにより、多重モジュラー L 値やモジュラー曲線上の因子周期の数論的性質を導き出す。

(3) 研究分担者 廣瀬進氏と共同して、Teichmüller モジュラー群の構造を調べ、その相対巾零完備化について Teichmüller レゴゲームが成り立つことを示し、Teichmüller モジュラーモチーフに付随するガロア表現と周期の表示を与える。

(4) 代数幾何学、数論についての専門書及び論文集を購入し、研究分担者 宮崎誓氏、寺井直樹氏と共同で行う代数幾何セミナー及び、研究分担者 上原健氏と共同で行う数論セミナーでこれらを勉強することによって、代数幾何学、数論についての最新の成果を学ぶ。

(5) 他大学・研究機関(外国を含む)に出張し、特に数論幾何、モジュライ理論、保型形式論を中心とする代数幾何学、数論の諸分野についての最新の成果を勉強し、またこれらの話題について共同研究及び成果発表を行う。

(6) 他大学・研究機関(外国を含む)の研究者を招いて、特に数論幾何、モジュライ理論、保型形式論を中心とする代数幾何学、数論の諸分野についての講演会及び共同研究会を行う。

(7) 他大学・研究機関(外国を含む)で行われる代数幾何学、数論に関する研究集会について、参加者への旅費等の支給を中心とした資金援助を行う。

#### 4. 研究成果

代数曲線や Abel 多様体のモジュライ空間の数論幾何的研究を進めて、次の成果を得た。

(1) 楕円モジュラーモチーフにおける Hecke 作用素の理論を構成し、その応用の一つとして多重モジュラーL値の代数性を示した。楕円モジュラーモチーフは、混合モチーフ、Galois 表現、多重モジュラーL値など数論の重要な研究テーマと関わりがあり、本研究はこのテーマに新しい進展をもたらした。

(2) リジッド解析を用いて、Abel 多様体が Jacobi 多様体として表されるための条件、すなわち Schottky 問題の解を与えた。

(3)  $p$  進ベクトル値 Siegel モジュラー形式の基礎理論を構成し、志村による概正則ベクトル値 Siegel モジュラー形式の  $p$  進版を構成して、その CM 点における代数性を示した。

(4) 数論的 Schottky-Mumford 一意化理論を用いることにより、代数曲線のモジュライ空間上で定義される一般の Mumford 形式の無限積表示を導いた。さらにその応用として、Ruelle ゼータ関数の特殊値の数論性を示した。この結果により、数論の重要問題であるゼータ値の有理性を、幾何的なゼータについて拡張して考察し、具体的な成果を与えることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文](計5件)

Takashi ICHIKAWA, Algebraic and rigid geometry on the Schottky problem, J. reine angew. Math. 査読有, 印刷中, DOI 10.1515/crelle-2013-0059

Takashi ICHIKAWA, Vector-valued  $p$ -adic Siegel modular forms, J. reine angew. Math. 査読有, 印刷中, DOI 10.1515/crelle-2012-0066

Takashi ICHIKAWA, Congruences between Siegel modular forms, J. Number Theory, 査読有, 133, 2013, 1362-1371

Takashi ICHIKAWA, Modular invariant  $D$ -modules, 査読有, 19, 2012, 1-4

Takashi ICHIKAWA, Vector bundles on a nearly degenerate Riemann surface, Math. Z., 査読有, 268, 2011, 969-977

##### [学会発表](計5件)

Takashi ICHIKAWA, Modular forms and invariants for algebraic curves, KIAS Workshop, 2013年5月28日, KOREA

Takashi ICHIKAWA, Selberg zeta values of Schottky groups, and the Mumford

isomorphisms, RIMS Conference, 2013年1月23日, JAPAN

Takashi ICHIKAWA, Arithmeticity of vector-valued Siegel modular forms in analytic and  $p$ -adic cases, 15th Hakuba Autumn Workshop, 2012年11月2日, JAPAN

Takashi ICHIKAWA, Automorphic forms on the moduli space of algebraic curves, November 4, 2011, 14th Hakuba Autumn Workshop, 2011年11月4日, JAPAN

Takashi ICHIKAWA, Moduli spaces of algebraic curves and automorphic forms, KIAS Workshop, 2011年8月29-30日, KOREA

##### [図書](計2件)

Yoshinori Hamahata, Takashi ICHIKAWA, Atsushi Murase and Takashi Sugano (eds.), Geometry and Analysis of Automorphic forms of Several Variables, Series on Number Theory and Its Applications, Vol. 7, World Scientific Publishing, 2011

<http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8192>

Takashi ICHIKAWA (Chief), Masanari Kida and Takao Yamazaki (eds.), Algebraic Number Theory and Related Topics 2009, RIMS Kokyuroku Bessatsu B25, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2011

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

##### [産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

市川 尚志 ( ICHIKAWA Takashi )  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号：20201923

### (2) 研究分担者

上原 健 ( UEHARA Tsuyoshi )  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号：80093970

### (3) 研究分担者

宮崎 誓 ( MIYAZAKI Chikashi )  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号：90229831

### (4) 研究分担者

寺井 直樹 ( TERAJ Naoki )  
佐賀大学・文化教育学部・教授  
研究者番号：90259862

### (5) 研究分担者

廣瀬 進 ( HIROSE Susumu )  
東京理科大学・理工学部・准教授  
研究者番号：10264144