

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540033

研究課題名(和文) 多変数保型形式の数論的不変量と保型 L 関数の研究

研究課題名(英文) Arithmetic invariants and automorphic L-functions for automorphic forms of several variables

研究代表者

村瀬 篤 (MURASE, Atsushi)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：40157772

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：有理数体上の四元数環上の2次ユニタリ群に関する保型形式の中で、テータリフトとして具体的に構成できる荒川リフトと呼ばれるものについて、その詳しい数論的性質、特にフーリエ係数と保型L関数との関係について研究し、フーリエ係数の一種の平均の絶対値の平方を保型L関数の特殊値によって表す公式を得た。

符号 $(2, n+2)$ の直交群上のBorcherds liftと呼ばれる保型形式が、正則な場合には、積対称性という新しい対称性によって特徴づけられることを示した。また、類似の事実をヤコビ形式の場合にも示した。

研究成果の概要(英文)：We investigated arithmetic properties of Arakawa lifts, which are automorphic forms on the unitary group of degree two for a quaternion algebra over the rational number field constructed via theta lifting. In particular we obtained a formula for the square of the absolute value of a certain average of Fourier coefficients of an Arakawa lift in terms of special values of automorphic L-functions.

We characterize the holomorphic Borcherds lifts on orthogonal groups of quadratic forms of signature $(2, n+2)$ in terms of the multiplicative symmetries. We also showed that a similar fact holds for Jacobi forms.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式 代数群 Borcherds lift 対称性 テータリフト フーリエ展開 保型L関数

1. 研究開始当初の背景

(1) 連携研究者の成田宏秋氏は、 $GL(2)$ と有理数体上の定符合四元数環 D の乗法群の積上の保型形式 (f, g) を input data とするテータリフトとして、 D 上の 2 次ユニタリ群 G 上の保型形式を構成した。これを (f, g) の荒川リフトという。2 次ユニタリ群に対応する対称空間は複素構造を持たないため、荒川リフトは通常の意味で正則ではないが、表現論的には四元数疎系列という特異な表現に属する。非正則保型形式の数論的研究は、未開拓の分野であり、その意味でも、荒川リフトの数論的研究は重要な課題である。

(2) Borchers は、弱正則ヤコビ形式 から一種のテータリフトを用いて、無限積を持つ極めて特異な階数 2 の直交群 $O(2, n+2)$ 上の保型形式を構成した。これを、 の Borchers lift という。研究協力者の B. Heim 氏と研究代表者は、平成 22 年度までに行われた共同研究において、階数 2 の直交群 $O(2, n+2)$ 上の Borchers lift が、ある種の対称性 (積対称性) を満たすことを示した。

2. 研究の目的

(1) (f, g) の荒川リフト $F=L(f, g)$ が Hecke 作用素の同時固有関数であるとき、 F の重要な数論的不変量であるフーリエ係数を F の保型 L 関数の言葉で表すことを目的とした。これは、 D 上の 2 次ユニタリ群上の一般の保型形式のフーリエ係数を保型 L 関数の特殊値と関係させる Boecherer 型予想を定式化する上でも重要な課題である。

(2) Hilbert modular 群上の Borchers lift が Bruinier によって構成されており、この場合にも積対称性が成立するかどうかを研究することを目的とした。

(3) 直交群 $O(2, n+2)$ 上の保型形式が積対称性を満たすならば、そのフーリエ展開に極めて強い束縛条件を課することが予想された。このことから、積対称性から Borchers lift であることが帰結するのではないかという予想が生まれた。本研究では、保型形式の積対称性から、input data の候補 を作りだし、当該の保型形式が の Borchers lift であることを示すことを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 平成 22 年度に、成田氏と研究代表者は、 (f, g) の荒川リフト $F=L(f, g)$ のフーリエ展開について研究し、 F が Hecke 作用素の同時固有関数のとき、フーリエ係数が (f, g) の周期を用いて表されることを証明した。従って、周期と (f, g) の保型 L 関数との関係、および F の保型 L 関数を (f, g) の保型 L 関数で表すこ

とを研究する。

(2) Hilbert modular 群上の Borchers lift と関係するテータ核は Siegel テータ関数である。Borchers lift の積対称性に直接関係する Siegel テータ関数の和対称性を研究する。

(3) ヤコビ形式について、ヤコビ型の積対称性を導入する。また、弱正則なヤコビ形式について、ヤコビ型の積対称性を満たすならば、Borchers の導入したベクトル・システムに付随する無限積として表されるかどうかという問題を考察する。

(4) 直交群 $O(2, n+2)$ 上の保型形式 F が積対称性を満たすとし、 F のフーリエ・ヤコビ係数の商にどのような束縛条件が課されるか調べる。また、これを用いて、フーリエ・ヤコビ係数の商の正則性について考察する。

4. 研究成果

(1) 連携研究者の成田氏との共同研究において、次のことを示した。 $GL(2)$ と有理数体上の定符合四元数環 D の乗法群の積上の保型形式 (f, g) に付随する荒川リフトを $F=L(f, g)$ とする。 (f, g) は Hecke 作用素の同時固有関数と仮定する。このとき、 F 自身も Hecke 作用素の同時固有関数となり、その保型 L 関数は、 (f, g) の保型 L 関数を用いて記述される。また、 F のフーリエ係数のある種の平均の絶対値の平方が、 (f, g) の保型 L 関数の特殊値、あるいは F の保型 L 関数の特殊値を用いて表される。

この結果から、 D 上の 2 次ユニタリ群上の一般の保型形式で Hecke 作用素の同時固有関数であるものに対し、そのフーリエ係数のある種の平均の絶対値の平方が保型 L 関数の特殊値で表されることが予想されるが、精密な予想はまだ定式化されておらず、今後の研究課題である。

(2) 研究協力者の Heim 氏との共同研究において、Hilbert modular 群上の Siegel テータ級数について、その和対称性を証明した。その応用として、Hilbert modular 群上の Borchers lift の積対称性を証明した。また、input data への Hecke 作用素の作用と Borchers lift への Hecke 作用素の作用が compatible であることを示した。Borchers lift の積対称性の応用として、Hilbert modular 群上のある保型形式が積対称性を満たさず、従って Borchers lift にはならないことを示した。これは従来の方法では、示すことができなかった結果である。

(3) 正則なヤコビ形式 がヤコビ型の積対称性を満たすとす。このとき、研究協力者の Heim 氏との共同研究において、次が成り立つことを示した。

のフーリエ展開係数の商はある種の recurrence relation を満たす。

のフーリエ展開係数で最初に零でないものから Borchers の導入したベクトル・システム v を構成することができる。

は v から構成される無限積と定数倍を除いて一致する。

以上の結果は、正則なヤコビ形式の場合、ベクトル・システムから構成される無限積がヤコビ型の積対称性によって特徴づけられることを意味している。

(4) 直交群 $O(2, n+2)$ 上の保型形式 F が正則でかつ積対称性を満たすとする。このとき、研究協力者の Heim 氏との共同研究において、次が成り立つことを示した。

F のフーリエ・ヤコビ展開係数で最初に零にならないものを (μ) とする。このとき、 (μ) がヤコビ型の積対称性を満たすことを示した。従って、(3) の結果より、 (μ) はあるベクトル・システムから構成される無限積の定数倍となることが示される。

F のフーリエ・ヤコビ展開係数の商 $f(k) = (\mu+k)/(\mu)$ ($k=1, 2, \dots$) について、それらがある recurrence relation を満たすことを示した。

$f(k)$ の満たす recurrence relation を用いて、任意の k に対し $f(k)$ が弱正則ヤコビ形式になることを示した。

$f(k) = -f(1)$ とおく。 F は (μ) の Borchers lift の定数倍になることを示した。

以上の結果は、直交群 $O(2, n+2)$ 上の正則保型形式の場合、Borchers lift が積対称性によって特徴づけられることを意味している。Borchers lift の特徴づけとして、今までに、その因子が Heegner divisor の整数係数一次結合になることという Bruinier の結果があったが、積対称性による特徴付けは全く新しいものであり、Borchers lift の研究への応用が期待される。直交群 $O(2, n+2)$ 上の有理型保型形式の場合には、フーリエ・ヤコビ展開が全空間では収束しないため、上記の方法はそのまま使うことはできない。この場合に Borchers lift が積対称性で特徴づけられるのかどうかという問題は今後の重要な課題である。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

B. Heim, A. Murase: Symmetries for Borchers lifts on Hilbert modular groups and Hirzebruch-Zagier divisors, to appear in International J. Math. 査読有 (2015)

B. Heim, A. Murase: Symmetries for Siegel theta functions, Borchers lifts and automorphic Green functions, J. Number Theory 査読有 133 (2013), no. 10, 3485-3499

A. Murase, H. Narita: Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, Israel Journal of Mathematics 査読有 187 (2012), 317- 369

B. Heim, A. Murase: A characterization of the Maass space on $O(2, m+2)$ by symmetries, International J. Math. 査読有 23 (2012), 1250006:1-13

B. Heim, A. Murase: Borchers lifts on $Sp_2(\mathbb{Z})$, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, Proceedings of the international symposium in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday 査読有, World Scientific (2011), 56-76

[学会発表](計5件)

A. Murase, "A characterization of holomorphic Borchers lifts by symmetries (joint work with B. Heim)", International Workshop in Mathematics, 18-20 February 2012, ドイツ工科大学(オマーン)

A. Murase, "Borchers lifts and symmetries (joint work with B. Heim)", 京都大学数理解析研究所共同研究集会「保型形式と保型的 L 函数の研究」, 16-20 January 2012, 京都大学数理解析研究所

B. Heim and A. Murase, "A characterization of Borchers lifts by symmetries", Ueda Memorial Conferences on Automorphic Forms, 24-26 January 2011, 奈良女子大学

B. Heim and A. Murase, "On recurrence relations and functional equations of infinite products", Ueda Memorial Conferences on Automorphic Forms, 24-26 January 2011, 奈良女子大学

B. Heim and A. Murase, "Igusa's modular form", 京都大学数理解析研究所共同研究集会「保型形式と関連する跡公式,ゼータ関数の研究」, 17-21 January 2011, 京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村瀬 篤 (MURASE, Atsushi)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 40157772

(2) 連携研究者

菅野 孝史 (SUGANO, Takashi)
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号: 30183841

(3) 連携研究者

成田 宏秋 (NARITA, Hiroaki)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号: 70433315

(4) 研究協力者

Bernhard Heim
German University of Technology (Oman)・
准教授