

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540061

研究課題名(和文)カラビヤウ曲面族の数論的側面と超幾何系

研究課題名(英文)Arithmetic aspects of Calabi-Yau surfaces and the hypergeometric system

研究代表者

志賀 弘典(Shiga, Hironori)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：90009605

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は K3 曲面 (Calabi-Yau 曲面) 族の周期写像を超幾何函数との関連のもとで捉え、数論的な応用をめざして進められた。そこに現れる保型函数の明示が基礎となる。アーベル曲面のモジュライに関しては、様々な先行研究があるが、幾何学的な解釈での具体的な対応は未知であった。複素アーベル曲面族を、ホッジ的に同値な楕円型 K3 曲面族と見ることにより、上記の問題を解決した。主結果は Modular maps for the family of abelian surfaces via K3 surfaces, Math. Nachrichten (永野中行氏との共著)として発表される。

研究成果の概要(英文)：In this project we aimed to find a new aspect of the period map for the K3 surface s based on the hypergeometric differential equations. We expected arithmetic applications of our approach also. For it, it is basic to obtain explicit representations of the modular functions those arise as the inverse of the period map. There are various foregoing studies for the moduli of abelian surfaces. But there was no exact result to describe the modular maps based on the geometric background. We found a good description of the parameter space for it by considering a family of elliptic K3 surfaces those are Hodge equivalent to the family of abelian surfaces. By this idea we succeeded to solve the above problem. The main result will be published as "Modular maps for the family of abelian surfaces via K3 surfaces", Math. Nachrichten (2014)(in printing, joint work with A. Nagano).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：K3 曲面 保型形式 超幾何函数 周期写像 アーベル曲面

1. 研究開始当初の背景

本プロジェクトは、 $K3$ 曲面族の周期のもつ数論的意味を、超幾何関数との関連のもとで発見し、その応用をめざすものである。 $K3$ 曲面族の周期の数論的意味を、超幾何系の文脈のもとで発見する、という上記のテーマには以下のような幾つかの異なった接近が考えられる。

(1) この研究テーマにおける“良い $K3$ 曲面族”とは何かを設定し、各々の族の代数幾何学的性質を研究すること。

(2) $K3$ 曲面族の周期をパラメータに関する解析関数と見て、それらに超幾何系が対応する理由を探求すること。

(3) (1)(2) の曲面族の粗なモジュライ空間内に現れる志村多様体を研究すること。

(4) Gauss による算術幾何関数の理論の多変数的、保型関数の発展を目指すこと。

(5) さまざまな超幾何関数の特殊値の代数性あるいは無理性を、Abel 多様体の虚数乗法論と結びつけて論じること。

1970 年代に研究代表者は、楕円曲線から発する古典的保型関数論の発展形を、 $K3$ 曲面から構築する意図で書かれた2編の論文を発表している。その後 Yau, Hosono, Borchards, Yoshikawa らが関わって盛んになっていった「 $K3$ モジュラー関数論ないし IV 型領域上の保型関数論」の嚆矢であった。さらに、論1988年、特別なケースに対して、テータ関数を用いて $K3$ 保型形式の具体的な Fourier 展開を与え、研究は精密化されたが、全保型形式環の生成系を与える点で、その後に見れた Borchards の研究とは一線を画す独自性を有するものである。

また、近年、(代数的) $K3$ 曲面族に対するさまざまな接近が試みられている。向井茂氏による $K3$ 曲面の有限自己同型群の列挙以後、自己同型のタイプに制限を加えて $K3$ 曲面族を構成する流れが生じた (A.Sarti, M.Reid, Yonemura, Belcastro, 馬正平ら)。しかし、これらの研究では鏡対称性の現れ方も系統的ではなく、保型形式の研究にも踏み込んでいない。さらに、 $K3$ 曲面族の周期微

分方程式と超幾何系との関連は M. Yoshida, K. Matsumoto, T. Sasaki らの研究があるが、数論的考察はまだ緒に付いたまま (Beukers らによる 1980 年代の注目すべき結果があるが)の状態である。

2. 研究の目的

以上の状態を踏まえて、以下に述べる新しい展開を計画した。

- (i) 多変数算術幾何平均と保型形式論との本質的関係の解明。 1799年 Gauss が得た算術幾何関数に対する三位一体定理 (算術幾何関数の逆数 = 楕円曲線の周期 = Gauss 超幾何関数) と Gauss 自身が 1818 年に与えたその保型形式的解釈 (Jacobi のテータ零値の2倍公式が算術幾何過程に一致している) とは、その異常な美しさにも関わらず 200 年余り多変数的な発展が皆無であり、1変数的な類似物もほとんど発見されていなかった。2007年、代表者は多変数算術幾何関数に関する三位一体定理とその保型形式的解釈の一般理論へ向かう最初の一撃を発表した。ここでは、88年の論文の精密な結果が大きな役割を果たした。ここに隠されている一般原理をより広汎な状態で明らかにしてゆく。また、07年論文で採用された3項算術幾何平均システムは超高速の近似法であり、近似計算への応用も興味深い。
- (ii) $K3$ 曲面の周期写像から生じる超幾何微分方程式および保型形式の構成。 超幾何微分方程式の Schwarz 写像から導かれる保型関数はさまざま構成されているが、数論的応用に乏しい。また、Hilbert modular 関数に関する研究はさまざまあるが、これも具体的な数論的結果に乏しい。この状態に鑑みて、Hilbert modular 関数を $K3$ modular 関数の観点から攻撃して、この分野に新展開をもたらしたい。実際には Batyrev らが展開した reflexive polytope を Newton Polygon と捉えることによっておびただしい $K3$ modular 関数がもたらされるが、その中に Hilbert

modular 函数を導くものが、予備研究ですで見ついている。

(iii) 志村曲線と、関連する種々の超幾何函数の数論的性質の研究。古典的 Gauss 超幾何函数の特殊値の代数性は 04 年の論文で論じられた。より広汎な超幾何函数、特に Appell 型および Lauricella 型の場合の議論はこれまでなされてこなかった。これは 04 年論文で得られた結果を基礎として考察可能であり、確実な収穫が見込まれる。

3. 研究の方法

目的の項 (i)(ii)(iii) に従って述べる。また、次項の成果とも結びつけて、ここで概説する。

- (i) 古典的算術幾何平均定理は、Jacobi の公式と呼ばれるテータ零値と超幾何函数を結びつける公式と等価であることが知られている。したがって、多変数の Jacobi 型公式を発見して算術幾何平均定理の拡張を目指すことが可能と考えられる。このアイデアを実現したのが論文[6]である。
- (ii) reflexive polytope から定まる K3 曲面族の研究を行うというアイデアで接近した。これは、近年進展している自己同型のタイプを重視する内外の研究者とは立脚点が異なり、十分な独創性をもつ視点であると自負する。筆者および筆者周辺の研究者は、前述の流れから得られた成果を凌ぐ、数論および超幾何系との関連を明確に記述する著しい結果を得ている。これを、深化発展させることをめざした。 reflexive polytope から定まる K3 曲面族は、研究代表者の指導のもと 1998 年当時修士院生の M. Ohtsuka によって 4319 種あることが知られている。この研究と Dolgachev らが進めている Picard 格子のタイプで規定される“格子型の K3 曲面族”の概念と結びつけることが可能である。このような方法論は、研究代表者の 1970 年代の楕円型 K3 曲面の表示法を発展させた Kumar 氏の最近の Kummer 曲面族のモジュライの記述と合体させることができる。この方法論の成果は論文 [1][3] 講演 (a)(c)(e) として発表された。

(iii) の主題は、研究代表者および当時研究代表者の修士院生であった K. Matsumoto が 80 年代に行った研究とつながっており、ある種の 2 変数 K3 曲面族のモジュライ空間として 2 次元超球と、そこに作用するピカル・モジュラー群が現れる。このモジュライ空間の 1 次元部分空間として各種の志村曲線が現れる。このとき、超球上の保型形式はテータ函数によって具体的に表示されるから、さまざまな例を近似計算で考察することが可能である。こうして、超球上の保型形式の空間上で志村曲線の定義方程式を書き下す可能性が現れるのである。

判別式 6 の場合については Maria Petkova (Zurich E.T.H.) との共同研究で結果を得ており、論文 [5] として発表した。また、この方法論の 2 次元的拡張が論文 [1] であると見ることもできる。

4. 研究成果

上記の目的と方法に従って下記、項目 5 の成果を得た。論文 [4] は、研究代表者が進めて来た K3 モジュラー函数の概説を行いつつ、最近の成果 [1] 等を解説した講演 (d) のサマリーノートである。また、論文 [2] はラホールにおける国際シンポジウム招待講演で、(b) で概説した K3 モジュラー函数の数論への応用をまとめた講演録である。他の研究成果の概要は、上記、方法の項を参照。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 編)

[1] Nagano and Shiga, H. Modular maps for the family of abelian surfaces via K3 surfaces, Mathematische Nachrichten (2014 年の掲載が確定)(査読あり)。

[2] Shiha, H., Classical problems in arithmetic via the theory of K3 surfaces, Proceeding of Math 21 Century, to appear. (査読あり)。

[3] Shiga, H., K3 曲面族を用いた Abel 曲面族の明示的モジュラー写像, 数理研講究録 no. 1871(2013), 189 -- 202 (査読なし)。

[4] Shiga, H., 超幾何的 K3 モジュラー函数, 第 11 回 Oka Symposium 報告集 (2013), 115-147 (査読なし)。

[5] M. Petkova and Shiga, H.: A new

interpretation of the Shimura curve with discriminant 6 in terms of Picard modular forms, Archiv der Mathematik, vol. 96(2011), no.4, 335 - 348 (査読あり).
[6] H. Shiga: A Jacobi type formula for a family of hyperelliptic curves of genus 3 with automorphism of order 4, Kyushu J. Math., vol. 65 (2011), 169 - 177 (査読あり).

〔学会発表〕(計 5 件)

(a) 「アーベル曲面族に対する保型写像の記述と楕円 K3 曲面族」, Workshop アクセサリー・パラメーター研究集会、

2013年3月16日、熊本大学

(b) "Classical problems in arithmetic via the theory of K3 surfaces", シンポジウム 6th Conference on 21st Century Mathematics, March 7, 2013, Lahore (Pakistan)

(c) 「K3 曲面族を用いた Abel 曲面族の明示的モジュラー写像」, Conference 保型表現とその周辺、2013年1月25日、京都大学数理解析研究所

(d) 「超幾何的 $K3$ モジュラー関数」, 第11回 岡シンポジウム、2012年12月16日、奈良女子大学

(e) Explicit Hilbert modular forms via hierarchy of K3 surfaces, ワークショップ Explicit modular forms and their application, Luminy (France), May 11, 2011.

〔雑誌論文〕(計 6 件)

〔学会発表〕(計 5 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者: 千葉大学名誉教授
志賀 弘典

(SHIGA HIRONORI)

研究者番号: 90009605

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: