

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540066

研究課題名(和文) 測度集中の幾何と曲率

研究課題名(英文) Geometry of measure concentration and curvature

研究代表者

塩谷 隆 (Shioya, Takashi)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90235507

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：Gromovによる測度距離空間の幾何学的理論を解明し、本を執筆した。オブザーバブル距離に関して、測度距離空間の列が測度距離空間へ収束するとき、この曲率次元条件が保たれることを証明した。これを応用して、リッチ曲率が非負の閉リーマン多様体に対して、第 $k$ 固有値と第1固有値の比が $k$ のみによる定数で評価できることを示した。Gromovはオブザーバブル距離を備えた測度距離空間全体の空間の自然なコンパクト化を定義した。これについて詳しく考察し、自然な距離構造を導入した。これを応用して、ユークリッド空間の半径が $n$ の平方根の $n$ 次元球面の極限が、無限次元ガウス空間へ収束することを証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied the details of a geometric theory of metric measure spaces due to Gromov and wrote a book for it. We proved that if a sequence of metric measure spaces converges to a metric measure space with respect to the observable distance, then the curvature-dimension condition is stable. As an application, we give an estimate of the ratio of the  $k$ -th eigenvalue and the first eigenvalue of the Laplacian on a closed Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature, where the estimate depends only on  $k$ . Gromov defined a natural compactification of the space of metric measure spaces with the observable distance. We deeply considered it and introduce a new metric structure on it. We apply our metric structure to prove that an  $n$ -dimensional sphere of radius square root of  $n$  in a Euclidean space converges to an infinite-dimensional Gaussian space as  $n$  tends to infinity.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：測度の集中現象 Levy族 オブザーバブル距離 曲率次元条件 リッチ曲率 ラプラシアン固有値  
ガウス測度 球面

## 1. 研究開始当初の背景

Levy はユークリッド空間の  $n$  次元単位球面上の任意の 1-Lipschitz 関数が、 $n$  が大きいとき定数関数に近づくことを示した。その後、V. Milman はこの現象を Banach 空間の幾何学を含む多様な分野への応用を見いだした。現在これは「測度の集中現象」と呼ばれ、盛んに研究されている。Gromov は測度の集中現象を元にして、測度距離空間の間の距離「オブザーバブル距離」を定義し、測度距離空間全体の空間の新しい幾何学的理論を構築した。これは、正曲率空間と距離空間の幾何学の一つの発展形である。しかしながら、彼はその理論のあらすじしか述べておらず、正当性と詳細については何も分かっていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、上記 Gromov の理論を解明し、これをさらに深化させ今後の研究の礎を築くことである。また、測度距離空間上の最適輸送理論に基づいたリッチ曲率の研究が盛んであるが、それとも関連させて研究を進める。Gromov の理論は無限次元空間の研究にも役立つと思われる、確率論や無限次元の群の研究にも応用を見い出したい。

## 3. 研究の方法

V. Milman と Gromov は閉リーマン多様体のゼロでない第 1 固有値が大きいとき、測度の集中現象が起きること、つまり任意の 1-Lipschitz 関数が定数に近くなることを示した。一方で E. Milman は閉リーマン多様体が非負リッチ曲率をもつとき、その逆が成り立つこと、つまり測度の集中現象がおこるならばラプラシアン第 1 固有値が大きくなることを証明した。ここで、第  $k$  固有値が大きいという条件について考察した。第  $k$  固有値が大きいときは、その閉リーマン多様体は  $k$  点からなる空間へ収束することが推察され、これを手がかりとして、研究を進めた。ユークリッド空間の  $n$  次元球面の半径が  $n$  の平方根であるとき、その球面上から  $k$  次元ユークリッド空間への自然な射影による球面上の体積測度の押し出しは、 $n$  が無限大へ発散するとき、 $k$  次元標準ガウス測度へ収束することが知られている。これは Maxwell により発見され、今日、Maxwell-Boltzmann 分布則と呼ばれている。この事実は、そのような球面の列が無限次元ガウス測度へと収束する可能性を示唆して、Gromov の理論の観点から非常に興味深い現象である。測度の集中現象は、確率論における大数の法則の幾何学版と見なせるが、Maxwell-Boltzmann 分布則は中心極限定理の幾何学版と見なせる。

## 4. 研究成果

当初の目的であった Gromov の理論の解明については、ほぼ満足の行く成果が得られた。特に、測度距離空間全体の空間のオブザーバブル距離に関する完備化についての一連の定理に対して精密な証明をつけた。Gromov の理論の解説する本を執筆し、現在出版社で査読を受けている。既に中間評価を通り、原稿の細かい手直しをしているところである。リッチ曲率の下限条件の測度距離空間への拡張概念として、曲率次元条件がある。これは最適輸送理論を用いてエントロピー汎関数の凸性により定義される。オブザーバブル距離に関して、測度距離空間の列が測度距離空間へ収束するとき、この曲率次元条件が保たれることを証明した。また、ラプラシアン第  $k$  固有値が無限大へ発散するような閉リーマン多様体の列は、オブザーバブル距離に関して  $k$  点からなる空間へ収束することを証明した。これらを応用して、リッチ曲率が非負の閉リーマン多様体に対して、ラプラシアン第  $k$  固有値が大きいこと、第 1 固有値が大きいこと、測度の集中現象がおこることの 3 条件が同値であることを証明した。さらに、第  $k$  固有値と第 1 固有値の比が  $k$  のみによる定数で評価できることを示した。従来の方法では、この評価が次元によってしまうが、次元によらない定数で評価したところは、革新的である。これについては論文リストの [5] で発表した (船野氏と共同)。

Gromov はオブザーバブル距離を備えた測度距離空間全体の空間の自然なコンパクト化を定義した。しかし、Gromov はこのコンパクト化に収束の概念は定義したが、これが位相になることは述べていなかった。このコンパクト化について詳しく考察し、Gromov の定義を少し修正して、収束に合致する自然な距離構造を導入した。さらにこれを応用して、ユークリッド空間の半径が  $n$  の平方根の  $n$  次元球面の極限が、無限次元ガウス空間へ収束することを証明した。ここで、無限次元ガウス空間とは、有限次元の標準ガウス測度を備えたユークリッド空間の無限次元版であり、先に述べたコンパクト化の元として実現されるものである。さらに半径を  $n$  の平方根より小さいオーダーのときは、測度の集中現象が起こり、 $n$  の平方根より大きいオーダーのときは、消散現象が起こることを証明した。オブザーバブル距離は上記コンパクト化の距離以下であるが、これらが同値な距離とはならないことも証明した。これらの結果については論文を執筆し、投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

1. Dahmani, François; Fujiwara, Koji; Guirardel, Vincent Free groups of interval exchange transformations are rare. Groups Geom. Dyn. 7 (2013), no. 4, 883–910. 査読あり

2. Funano, Kei and Shioya, Takashi; Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian. Geom. Funct. Anal. 23(2013), 888-936. 査読あり

3. Fujiwara, Koji; Geometry of the Funk metric on Weil-Petersson spaces. Math. Z. 274 (2013), no. 1-2, 647–665. 査読あり

4. Fujiwara, Koji; Toyoda, Tetsu Random groups have fixed points on CAT(0) cube complexes. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 3, 1023–1031. 査読あり

5. Fujiwara, Koji; Manning, Jason Fox Simplicial volume and fillings of hyperbolic manifolds. Algebr. Geom. Topol. 11 (2011), no. 4, 2237–2264. 査読あり

6. Shioya, Takashi; Geometric analysis of Alexandrov spaces. Su Buqing memorial lectures. No. 1, 31-46, Tohoku Math. Publ., 35, Tohoku Univ., Sendai, 2011. 査読あり

7. Shioya, Takashi; Collapsing three-manifolds with a lower curvature bound. Tohoku Math. J. (2) 63 (2011), no. 4, 471-487. 査読あり

8. Shioya, Takashi; Geometric analysis on Alexandrov spaces [translation of MR2560142]. Sugaku Expositions 24 (2011), no. 2, 145-167. 原語版は査読あり

9. Kuwae, Kazuhiro; Shioya, Takashi; A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, Tohoku Math. J. (2) 63 (2011), no. 1, 59-76. 査読あり

〔学会発表〕(計5件)

1.  
発表者名：塩谷 隆  
発表標題：空間の集中・収束・消散

学会等名：日本数学会 年会  
(招待講演，企画特別講演)  
発表年月日：2014年3月17日  
発表場所：学習院大学，東京都

2.  
発表者名：Shioya, Takashi  
発表標題：Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian  
学会等名：Heat Kernels, Stochastic Processes and Functional Inequalities  
(招待講演)  
発表年月日：2013年5月9日  
発表場所：オーベルウォルハッフア数学研究所，ドイツ

3.  
発表者名：Shioya, Takashi  
発表標題：Metric measure geometry of high-dimensional spaces  
学会等名：The 5th GCOE Internal Symposium on "Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy  
(招待講演)  
発表年月日：2013年3月6日  
発表場所：東北大学理学部，仙台市

4.  
発表者名：塩谷 隆  
発表標題：Metric measure geometry for high-dimensional spaces  
学会等名：リーマン幾何と幾何解析  
(招待講演)  
発表年月日：2013年2月23日  
発表場所：筑波大学，つくば市

5.  
発表者名：Shioya, Takashi  
発表標題：Concentration of metric measure spaces  
学会等名：Analysis and Geometry in Metric

## Measure Spaces

(招待講演)

発表年月日：2012年5月7日～10日

(連続5回講演)

発表場所：デ・ジョルジ研究所, Pisa, Italy

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

### 6. 研究組織

#### (1) 研究代表者

塩谷 隆 (SHIOTA, Takashi)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90235507

#### (2) 研究分担者

藤原 耕二 (FUJIWARA, Koji)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60229078