様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００７０
研究課題名（和文）ラプラシアンの断熱展開理論の研究とその応用

研究課題名（英文）Study on the general adiabatic expansion theory for Laplacian and its some applications

研究代表者
長瀬　正義（NAGASE, Masayoshi）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：３０１７５５０９
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,800,000円、（間接経費）　1,140,000円

研究成果の概要（和文）：ラプラシアンに関連する題材の研究において，一般断熱展開理論が強力な働きをすることを明らかにした。特に，接触リーマン多様体上のKohn-Rossiラプラシアンの与える熱核のあらゆる微分の漸近展開係数については、その理論に基づいたある公式を得た。その公式と微積分学の初等的知識のみを使って，漸近展開係数の列の任意高次項まで，エルミート丹野接続の曲率係数，捻じれ率，Nijenhuisテンソルを使った普遍多項式表示を具体的に導き得る。（従来の方法では高度な知識が必要であり，考察はさほど進んでいなかったようである。）また，CR-山辺問題についての考察においてもその理論が有効であることを示した。

研究成果の概要（英文）：We clarified the usefulness and powerfulness of the general adiabatic expansion theory in studying some subjects related to Laplacian. In particular, based on the theory we obtained a formula for the coefficients of the asymptotic expansion of every derivative of the heat kernel associated to the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifold. In order to describe the coefficients explicitly up to an arbitrarily high order as universal polynomials built from the curvature, the torsion (of hermitian Tanno connection) and the Nijenhuis tensor, we need only a basic knowledge of calculus added to the formula. (The conventional method requires various kinds of profound knowledge and there may be few investigations on the coefficients.) We found also that the theory is useful for investigating the so-called CR-Yamabe problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ラプラシアン　熱核　断熱展開

１．研究開始当初の背景

研究開始当初，当代表者は一般断熱展開理論が様々な場面で有効であることを訴えたいと考えていた。この理論は，スピン構造の研究の道具として当代表者の導入したものである（Nagase, J. Func. Anal., 251, 2007, 680-737)。本来のその理論ではファイバーバンドルの底空間方向への断熱展開を考察しており，議論は多少複雑である。設定を単純化してのその理論でも多分に有効であろうと当時感じており，様々なラプラシアンに関連する種々題材の研究へのその理論の適用を探っていた。適用対象を Kohn-Rossi ラプラシアン□に関連する題材（特に熱核）としているのが，当課題研究である。

ラプラシアン□は通常，強擬凸 CR-多様体（よって概複素構造 J は可積分としている）上で論じられるものであるが，当研究では，J には可積分性を課さないケース（そうした多様体を接触リーマン多様体と呼ぶ）上で考察を進めている。一般断熱展開理論を適用するに当たってはそうせざるを得ない面があり，実は，その為に，まずその多様体に適当な意味で適合している線形接続を探し出す必要があった。J が可積分である場合は田中-Webster による接続が適合していることは既に知られており，また，J が可積分でない場合には丹野による接続が広く使われていた。ただ，そのラプラシアンに関連する研究においては丹野接続では(当研究代表者には)不満な点があった。当代表者はその不満点を解消する接続（それをエルミート丹野接続と呼ぶ）を導入しており，この接続と一般断熱展開理論の援用によってラプラシアン□に関連する様々な研究を推し進めようと考えていた。

２．研究の目的

まず，一般断熱展開理論についてごく簡単に説明したい。注目点の周辺で接続に関する平行正規直交枠を 1/ε 倍し正規座標の与える枠を ε 倍する操作（断熱変換）に着目する。（こうした変換は状況に応じて様々な変種を考える必要がある。）平坦なユークリッド空間ではこの変換を施しても元に戻るだけであるが，曲がった空間では微妙に元に戻らない。当代表者は，この変換に関して次のような作業予想を持っている。

（作業仮説） ε をゼロに近づけることによって Taylor 展開（断熱展開）を考えると、凝縮してしまっていて観察できなかった対象の持つ様々な性質が、 ε の k 乗（k = 0, 1, 2, ・・・）達に関する（断熱）展開式の係数列という形で顕在化する。

当課題研究では、様々な場面でこの作業仮説が有用であり、断熱操作・断熱展開は強力な武器であることを明らかにすることが主な目的である。接触リーマン多様体上の Kohn-Rossi ラプラシアン□について，そうした考察を遂行することが第１の目標である。（このラプラシアンは楕円型ではなく，良く使われる楕円型理論はこのケースでは無効である。我々の理論は楕円型でなくとも有効である。）以下，より具体的に研究の方向を説明したい。

（１）接触リーマン多様体上のラプラシアン□に付随する熱核の研究： 熱核のトレースの漸近展開係数達の明示公式を導くことを主目的とした。数式ソフト Mathematica を使った自動計算プログラムの作成も進めた。

①接触リーマン多様体上のエルミート丹野接続の研究について。この研究は熱核研究を遂行するための準備の一つであり，目標（２）の準備にもなっている。

②変形ハイゼンベルグ群の持つ接触リーマン構造の研究や，その上のラプラシアン□に付随する熱核の研究について。本来のハイゼンベルグ群は典型的な強擬凸構造を持つ。その原点の近傍を接触リーマン多様体の注目点の近傍に置き換えて，変形ハイゼンベルグ群を得る。ラプラシアン□に付随する概念のその注目点での研究は，結果的にこの変形ハイゼンベルグ群上の□に付随するそれらの研究に帰着される。

③変形ハイゼンベルグ群上の熱核漸近展開研究への一般断熱展開理論の適用について。その熱核について「作業予想」に従った考察を行った。結果的に，接触リーマン多様体上のそれの研究となる。

（２）CR-山辺問題の基礎的研究： リーマン多様体上のそれ，強擬凸 CR-多様体上のそれは，既に肯定的に解決されている。リーマン多様体上では Levi-Civita 接続の，強擬凸多様体上では田中-Webster 接続の, 共形変換に関する主張である。本研究で取り組んだのは，接触リーマン多様体上の問題「接触形式の共形変換によって，対応するエルミート丹野接続のスカラー曲率を定数とできるか？」である。この問題に関連して現れるある種のラプラシアン（CR ラプラシアン）の研究においても断熱展開理論は有効であると当代表者は考えている。当課題研究ではその問題について基礎的研究を進めた。当課題研究では主に，エルミート丹野接続と CR ラプラシアンについての考察を行った。（本格的な研究は次の機会に譲りたい。）

３．研究の方法

それぞれの課題研究の根底には一般断熱展開理論がある。

（１）「接触リーマン多様体上のラプラシ

アン□に付随する熱核の研究」について：この研究は，エルミート丹野接続，変形ハイゼンベルグ群上の熱核の研究に帰着される。
①「接触リーマン多様体上のエルミート丹野接続の研究」について：Ｊの可積分性を課さない場合，適合する接続には，接続とＪの可換性を認めるか，あるタイプのトーションの消滅を認めるか，どちらか一方だけが可能であることが既に当代表者によって示されている。丹野接続はその消滅を認めており，エルミート丹野接続∇は可換性を認めている。リーマン多様体に適合した接続はLevi-Civita接続であり，その接続に関連する研究は膨大である。接触リーマン多様体に適合した接続はエルミート丹野接続であると当代表者は考えており，Levi-Civita接続に関するその膨大な研究を参考に，エルミート丹野接続に関する様々な研究を進めた。
②「変形ハイゼンベルグ群の持つ接触リーマン構造の研究」について：Ｊの可積分性は空間の微小な変形で崩れると考える必要があり，変形ハイゼンベルグ群の持つＪには可積分性は望めない。本来のハイゼンベルグ群の持つ強擬凸構造に非常に近いが，微妙にずれている。そのずれを詳細に研究する。手段は，その群の持つエルミート丹野接続の挙動の研究である。
③「変形ハイゼンベルグ群上のラプラシアン□に付随する熱核の研究」について：一般断熱展開理論を直接援用するのはこれに関する研究である。特に，それのトレースの漸近展開係数の明示公式がその理論より導かれる。
④「接触リーマン多様体上のラプラシアン□に付随する熱核の研究」について：Duhamelの原理に従い，この熱核の研究を③の研究に帰着する。

（２）「CR-山辺問題の基礎的研究」について：
本来の山辺問題は楕円型であるリーマンラプラシアンに関連しており，微分作用素の楕円型理論を基にその問題についての考察は進められる。強擬凸の場合や接触リーマン多様体の場合はその楕円型理論が使えない。楕円型でなくとも有効な手段である一般断熱展開理論を武器として我々のケースでの研究は進められる。

４．研究成果

一般断熱展開理論は当代表者が四元数スピン研究の道具として導入したものであるが、当課題研究では他の題材、特に接触リーマン多様体上の Kohn-Rossi ラプラシアン□に付随する熱核に関連した研究，CR-山辺問題に関連した研究においても有用な理論であることを明らかにした。一部の結果は論文にまとめられており、更なる考察や結果について論文を準備中である。

（１）「接触リーマン多様体上のKohn-Rossi ラプラシアン□に付随する熱核p(t,z,z')の研究」について：
強擬凸 CR-多様体や接触リーマン多様体の持つラプラシアン□ に関する「作業予想」は，ほぼ肯定的であることを示した。成果は次の論文にまとめた。
・ M. Nagase, The heat equation for the Kohn Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.
・R. Imai, M. Nagase, The second term in the asymptotics of the Kohn-Rossi heat kernel on contact Riemannian manifolds, preprint.
これらでは，熱核（の z= z'=0 における微分達）の，時間ｔが減少する場合の漸近展開係数達の一般断熱展開理論に従った計算方法，Ｊが可積分の場合のその一部の筆算による実際の計算結果，Mathematica を使った更なる計算結果などを紹介した。
熱核の漸近展開係数の研究は Gilkey 理論によるものが，良く知られている。その理論では，係数達のある種の普遍的性質に着目し,そうした性質を持つ普遍式達を網羅し，それらの一次結合へと記述される漸近展開係数の一次結合係数を様々な手段を駆使して決定している。普遍性を示す,網羅する，一次結合係数を決定する，どれも非常に困難で高度な知識を必要とし安易には採用できない手法である。一般断熱展開理論による我々の手段は，初等的微積分の知識を使うだけである。又，Gilkey理論では微分作用素の楕円型理論が重要な役割を果たすが，ラプラシアン□は楕円型ではなくその点でも適用には困難さが伴う。我々の理論の適用には楕円型である必要もなく，その点でも有利な立場にある。以降，目的欄の（１）のそれぞれに対応させて簡潔に研究成果を記す。

研究の目的(1)①について：エルミート丹野接続∇を使ったラプラシアン□のワイツェンベック型公式を得た。また，∇の接続形式の∇-標準座標に関するTaylor展開係数の，曲率，捻じれ率，Nijenhuisテンソル を使った普遍多項式表示を得た。更に∇-平行正規直交枠と∇-標準枠との変換関数のTaylor展開係数についても同様な表示を得た。実は，これら普遍多項式表示と熱核漸近展開係数の関係を導くのが，一般断熱展開理論である。

研究の目的(1)② について：変形ハイゼンベルグ群の構成を巧く行うことによって，原点からの∇-測地線は互いに交わらず，∇-標準座標ｚは大域的に取れることを示した。

研究の目的(1)③ について：変形ハイゼンベルグ群に座標ｚに関するある種の断熱変換を施し断熱展開を得る。得られる断熱展開

係数達と熱核の漸近展開係数達との関連を明らかにした。そして，これら２種類の係数達と「研究の目的(1)(a)」の普遍多項式達との関係を明らかにした。以上の研究より，漸近展開係数達の初等的手段による計算手段を得た。(第１項は以前から知られており）J が可積分である場合の筆記計算による第２項の具体的表示，可積分性を課さない場合の Mathematica を使った第２項の表示を得ている。

（２）「CR-山辺問題の基礎的研究」について：
接触リーマン構造や，エルミート丹野接続の CR 変換公式を得た。接触形式の関数倍（共形変換）が自然に導く変換を CR 変換と呼んでおり，Kohn-Rossi ラプラシアンや CR ラプラシアンの CR 変換公式も得ている。また，CR ラプラシアンに付随する熱核や CR グリーン関数の持つ基本的性質について研究した。グリーン関数への着目はリーマン多様体上の山辺問題で採用された考察方法であるが，強擬凸多様体上のそれでは採用されなかった。楕円型理論の使えない CR ケースでは情報量が少なく，その関数についての考察が困難なためであろう。本研究では（楕円型である必要のない）一般断熱展開理論を使ってグリーン関数の研究を進めた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計４件)

① 長瀬正義, On the trace and the infinitesimally deformed chiral anomaly of Dirac operators on twistor spaces and the change of metrics on the base spaces, Saitama Math. J. Vol.30, 2013, 39--57 (査読有り)
②下川航也，他， Rational tangle surgery and Xer recombination on catenanes, Algebr. Geom. Topol., Vol.12, 2012, 1183--1210 (査読有り)
・その他，未発表段階の論文２編（研究成果欄）

６．研究組織

(1)研究代表者
長瀬　正義（NAGASE, Masayoshi）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：３０１７５５０９

(2)研究分担者

(3)連携研究者
水谷　忠良（MIZUTANI, Tadayoshi）
埼玉大学・名誉教授
研究者番号：２００８０４９２

阪本　邦夫（SAKAMOTO, Kunio）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：７００８９８２９

下川　航也（SHIMOKAWA, Koya）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：６０３１２６３３

江頭　信二（EGASHIRA, Shinji）
埼玉大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：００２６１８７６