

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540108

研究課題名(和文) 対称空間の幾何理論の部分多様体論への応用

研究課題名(英文) Applications of geometry of symmetric spaces to submanifold theory

研究代表者

田中 真紀子 (Tanaka, Makiko)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：20255623

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円、(間接経費) 510,000円

研究成果の概要(和文)：対称空間は各点で点対称が定義できるリーマン多様体であり、微分幾何学において重要かつ基本的な研究対象である。研究代表者は田崎博之氏と共同で、コンパクト型エルミート対称空間 $M$ の2つの実形の交叉が対蹠集合になることを、 $M$ が既約でない場合も含めて証明した。また、Peter Quast氏と共同で、対称 $R$ 空間の鏡映部分多様体が凸であることを証明した。さらに、Jost-Hinrich Eschenburg氏とQuast氏と共同で、半単純エルミート対称空間 $M$ を半単純リー群 $G$ の随伴軌道として実現した場合に、 $M$ の等長変換は $G$ のリー環の線形等長変換に拡張できることを証明した。

研究成果の概要(英文)：A symmetric space is a Riemannian manifold which admits the geodesic symmetry at each point, which is an important and fundamental object in differential geometry. The principal investigator or proved, in the joint work with Hiroyuki Tasaki, that the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space  $M$  of compact type is an antipodal set where  $M$  is not necessarily irreducible. She also proved, in the joint work with Peter Quast, that any reflective submanifold in a symmetric  $R$ -space is convex. And she also proved, in the joint work with Jost-Hinrich Eschenburg and Quast, that any isometry of a semisimple Hermitian symmetric space  $M$  can be extended to a linear isometry of the Lie algebra of  $G$  when  $M$  is realized as an adjoint orbit of a semisimple Lie group  $G$ .

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：エルミート対称空間 実形の交叉 対蹠集合 対称 $R$ 空間

### 1. 研究開始当初の背景

各点で点対称(その点を孤立不動点とする対合的等長変換)が定義できるリーマン多様体を対称空間とよぶ。特にリーマン多様体がエルミート多様体で、点対称が正則等長変換のとき、対称空間はエルミート対称空間とよばれる。エルミート対称空間の対合的反正則等長変換の不動点集合は実形とよばれる。2次元球面の大円が実形の典型的な例である。2次元球面の2つの異なる大円は必ず対蹠的な2点で交わる。研究代表者は田崎博之氏との共同研究で、この事実を一般のコンパクト型エルミート対称空間の実形に対して拡張した。すなわち、コンパクト型エルミート対称空間の2つの実形の交叉が離散的ならば対蹠集合になることを証明した。ここで対蹠集合とは、各点での点対称がすべての点を固定するような離散集合である。コンパクト対称空間の対蹠集合の位数の最大値を2-number とよび、2-number を与える対蹠集合を大対蹠集合とよぶ。田崎氏と研究代表者はさらに、2つの実形が合同なときには交叉が大対蹠集合になることを証明した。この証明で重要な役割を果たしたのはChen-Nagano 理論である。Chen-Nagano 理論は、コンパクト対称空間の「極地」と「子午空間」とよばれる全測地的部分多様体の組によってその対称空間の構造が決まるという理論で、1980年代にB.-Y. Chenと長野正によって構築された。

### 2. 研究の目的

対称空間は微分幾何学における重要かつ基本的な研究対象であり、リー群とリー環の理論を応用することにより、その性質や構造を具体的に調べることが可能である。Chen-Nagano 理論は、極地と子午空間とよばれる全測地的部分多様体(したがってそれらは対称空間の構造をもつ)の組を基本的な枠組みとするコンパクト対称空間の理論である。Chen-Nagano 理論を用いて、従来の研究とは異なる視点と手法によりコンパクト対称空間の性質や構造をより深く理解し、関連する幾何に应用することが研究代表者の研究目標である。本研究課題では1.で述べた研究の背景を動機として、より一般のコンパクト対称空間の2つの鏡映部分多様体の交叉を調べることを目的とした。

### 3. 研究の方法

(1) コンパクト型エルミート対称空間の2つの実形の交叉が離散的ならば対蹠集合になることの証明を参考にして、コンパクト対称空間の2つの鏡映部分多様体の交叉についての考察を行った。その際、我々の証明に不備があることに気付いた。証明中の議論に、コンパクト型エルミート対称空間が既約でない場合には正しくない議論が含まれていた。そこで、この問題を解決して正しい証明を与えるために、既約ではないコンパクト型

エルミート対称空間の実形について考察することが必要になった。非既約コンパクト型エルミート対称空間の実形の分類、および、非既約コンパクト型エルミート空間における2つの実形の組み合わせの分類を行った。

(2) コンパクト型エルミート対称空間の実形は対称R空間であることが知られている。対称R空間はコンパクト対称空間の中でも特に良い性質を持つ。対称R空間についてはいくつかの特徴付けが知られているので、それにより多角的に対称R空間の鏡映部分多様体を研究することを試みた。

### 4. 研究成果

(1) 既約コンパクト型エルミート対称空間Mの反正則等長写像に対して対角実形とよばれる $M \times M$ の実形が定まる。非既約コンパクト型エルミート対称空間の実形は、既約因子の実形と対角実形の直積であることがわかった。また、コンパクト型エルミート対称空間Mの2つの実形の組み合わせは、本質的に4つの場合に分類できることがわかり、2つの実形の交叉は、Mが既約の場合に帰着される場合と、2つの実形がともに対角実形の場合に帰着される場合を考えれば十分であることがわかった。以上の結果を用いてコンパクト型エルミート対称空間の2つの実形の交叉が離散的ならば対蹠集合になることを証明を正しく修正し、前論文の修正と非既約の場合の結果をそれぞれ論文にまとめた。これらは学術雑誌への掲載が決定している(〔雑誌論文〕)。対称R空間の2つの鏡映部分多様体の交叉については、具体例を中心に考察を行いある種の仮定のもとでは交叉が対蹠集合になることがわかったが、研究を継続中である。

(2) コンパクト型エルミート対称空間の2つの実形の交叉Iと、それらの実形を定める対合的反正則等長変換から得られる正則等長変換の不動点集合Fとの関係に着目し、Fがいつ離散的になるか、そのときFとIは一致するかについて調べた。Fが離散的になるための必要十分条件を求め、それにより、Fが離散的なときには対蹠集合になること、および、Iと一致すること、さらに、ある種のワイル群の軌道になることがわかった。これらの研究には対称三対を利用した。これらの結果は井川治氏および田崎博之氏との共著論文として発表予定である。

(3) コンパクト型エルミート対称空間の実形は対称R空間であり、その逆も成り立つことが知られている。Peter Quast 氏と研究代表者は対称R空間Mの鏡映部分多様体Sが凸であることを証明した。つまり、Sの任意の2点を結ぶS内の最短測地線はM内でも最短であることを証明した(〔雑誌論文〕)。対称R空間の鏡映部分多様体は対称R空間

であろうとの予想のもと、研究代表者は Jost-Hinrich Eschenburg 氏と Quast 氏との共同研究で、対称 R 空間  $M$  を外的対称空間（あるコンパクト型対称空間の線形イソトロピー軌道として実現されるユークリッド空間  $E$  の部分多様体）と見なすことにより、 $M$  の等長変換がユークリッド空間  $E$  に拡張できるかについての考察を行った。その結果、対称 R 空間の特別なクラスであるコンパクト型エルミート対称空間、および、非コンパクト型エルミート対称空間について、任意の等長変換がユークリッド空間（この場合は半単純リー環）の線形等長変換に拡張できることを証明した（〔雑誌論文〕）。その証明は一般の対称 R 空間にただちに拡張できるものではなく、拡張のためには対称 R 空間の内在的な性質をよく調べる必要があると判断し、Loos による直交トーラスを用いた対称 R 空間の特徴付けに着目した。Loos の証明はジョルダン三対系の理論を用いたものであるが、Chen-Nagano 理論を用いたより幾何学的手法により、対称 R 空間の極大トーラスは直交トーラスになることを証明した（〔雑誌論文〕）。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 12 件)

J.-H. Eschenburg, P. Quast and M. S. Tanaka, Maximal tori of extrinsic symmetric spaces and meridians, Osaka J. Math. に掲載予定, 査読あり.

M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan に掲載予定, 査読あり.

M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: ``The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type'', J. Math. Soc. Japan に掲載予定, 査読あり.

M. S. Tanaka, Geometry of symmetric R-spaces, Geometry and Analysis on Manifolds - In memory of Professor Shoshichi Kobayashi -, Progress in Mathematics (Birkhauser) に掲載予定, 査読あり.

M. S. Tanaka, Fixed point sets of isometries and the intersection of real forms in a Hermitian symmetric space of compact type, Proceedings of the Seventeenth International Workshop on Differential Geometry and Related fields, vol. 17, 2013, 31-39, 査読なし.

J.-H. Eschenburg, P. Quast and M. S. Tanaka, Isometries of Hermitian symmetric spaces, J. Lie Theory, vol. 23, 2013, 113-118, 査読あり.

M. S. Tanaka, Antipodal sets of compact symmetric spaces and the intersection of totally geodesic submanifolds, Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, Proceedings of the International Workshop in Honor of S. Maeda's 60th Birthday, 205-219, 2013, Academic Press, 査読あり.

M. S. Tanaka, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, Proceedings of the Sixteenth International Workshop on Differential Geometry and Related fields, vol. 16, 2012, 89-96, 査読なし.

P. Quast and M. S. Tanaka, Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces, Tohoku Math. J., vol. 64, 2012, 607-616, 査読あり.

田中 真紀子, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2012」報告集, 2012, 27-33, 査読なし.

田中 真紀子, Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces, 部分多様体論・湯沢 2011 研究集会記録, 2012, 29-34, 査読なし.

M. S. Tanaka, Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces and their

applications, Proceedings of the Fifteenth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, vol. 15, 2011, 11-18, 査読なし.

[学会発表](計 16 件)

M. S. Tanaka, “Fixed point sets of holomorphic isometries of Hermitian symmetric spaces”, アウグスブルグ大学微分幾何セミナー, アウグスブルグ大学, ドイツ・アウグスブルグ, 2014 年 3 月 27 日.

M. S. Tanaka, “Fixed point sets of isometries and the intersection of real forms in a Hermitian symmetric space of compact type”, The 17th International Workshop on Differential Geometry, NIMS, 韓国・デジョン, 2013 年 9 月 30 日.

M. S. Tanaka, “Geometry of symmetric R-spaces”, Geometry and Analysis on Manifolds - A Memorial Symposium for Professor Shoshichi Kobayashi, 東京大学駒場キャンパス, 2013 年 5 月 23 日.

田中真紀子, 「コンパクト対称空間の対蹠集合と全測地的部分多様体の交叉」, 日本数学会 2013 年度年会 特別講演, 京都大学吉田キャンパス, 2013 年 3 月 21 日.

田中真紀子, “Isometries of Hermitian symmetric spaces”, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 筑波大学, 2013 年 2 月 12 日.

M. S. Tanaka, “Isometries of Hermitian symmetric spaces”, The 6th OCAMI-KNUGRG Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Theory in Symmetric Spaces and Lie Theory in Finite and Infinite Dimensions, 大阪市立大学, 2013 年 2 月 3 日.

M. S. Tanaka, “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”, The 16th International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook National University, 韓国・テグ, 2012 年 11 月 1 日.

M. S. Tanaka, “The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type”, Augsburg 大学微分幾何セミナー, アウグスブルグ大学, ドイツ・アウグスブルグ, 2012 年 10 月 2 日.

田中真紀子, 田崎博之 (講演者は田崎博之), 「コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉 II」, 2012 年日本数学会秋季総合分科会, 九州大学伊都キャンパス, 2012 年 9 月 18 日.

田中真紀子, 「コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉」, 部分多様体幾何とリー群作用 2012, 東京理科大学森戸記念館, 2012 年 9 月 3 日.

田中真紀子, 「コンパクト対称空間の対蹠集合と部分多様体の交叉」, 部分多様体の微分幾何学及び関連課題 前田定廣先生還暦記念研究集会, 佐賀大学, 2012 年 8 月 6 日.

P. Quast, 田中真紀子 (講演者は田中真紀子), “Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces”, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学神楽坂キャンパス), 2012 年 3 月 26 日.

M. S. Tanaka, “Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces and their applications”, The 10th Pacific Rim Geometry Conference, 大阪市立大学, 2011 年 12 月 1 日.

田中真紀子, “Convexity of reflective submanifolds in symmetric R-spaces”, 部分多様体論・湯沢 2011, 湯沢グランドホテル, 2011 年 11 月 25 日.

M. S. Tanaka, “Antipodal sets of compact Riemannian symmetric spaces and their applications”, The 15th International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook National University, 韓国・テグ, 2011 年 11 月 4 日.

M. S. Tanaka, “Antipodal sets of compact symmetric spaces and their

applications ”, Workshop on Symmetric  
Spaces, University of Augsburg, ドイツ・  
アウグスブルグ, 2011 年 8 月 26 日.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

田中 真紀子 (Makiko Sumi Tanaka)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：2 0 2 5 5 6 2 3