

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 12 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540111

研究課題名(和文)幾何構造を保つ微分同相群の位相幾何学的研究

研究課題名(英文)Study on Diffeomorphism Groups preserving a Geometric Structure

研究代表者

福井 和彦 (FUKUI, Kazuhiko)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：30065883

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：多様体上の幾何構造の解明のため、その構造を保つ微分同相群の代数構造に焦点をあて、研究を行った。葉層構造に対して、葉を保つ微分同相群の単純性の考察、葉層構造や多様体対を保つ微分同相群の一樣完全性の解明と交換子長の考察を行った。成果として、(1)葉を保つ微分同相群が単純群になる条件の特徴づけ、(2)葉を保つ微分同相写像の交換子長についての考察と、この群が一樣完全になる特徴づけ、および、(3)多様体対 (M,N) に対して、 N を保存する M の微分同相群 $D(M,N)$ の一樣完全性についての考察と、 $D(M,N)$ の一樣完全性の特徴づけを得た。

研究成果の概要(英文)：In order to clarify geometric structures on a manifold, I studied the algebraic structure of the diffeomorphism group preserving a geometric structure. As results, I got (1) characterization of the simplicity of the leaf preserving diffeomorphism group for foliated manifolds, (2) consideration of commutator length for leaf preserving diffeomorphisms, especially characterization of the uniform perfectness of the groups for 1 dimensional foliations on the 2-torus and (3) for manifold pair (M,N) , characterization of the uniform perfectness of the diffeomorphism group $D(M,N)$ preserving N .

研究分野：微分トポロジー

科研費の分科・細目：数学、幾何学

キーワード：微分同相群 幾何構造 一樣完全性 交換子長 擬準同型写像 単純性

1. 研究開始当初の背景

幾何構造を保つ微分同相群の構造を研究することはクライン以来研究されている重要な問題であり、種々の幾何構造の幾何的様相に深く関係していることが知られている。本研究は種々の微分同相群の構造の研究を通して幾何構造の特性を解明することにある。Anderson, Herman, Mather, Thurstonらは多様体の同相群や微分同相群の構造を研究し、この群の完全性や単純性についての知見を得た。Matherは n 次元ユークリッド空間のコンパクトな台を持つ同相群の1次元以上のホモロジー群が消えることを示した。したがって、Epsteinの結果により、それらの群は単純群であることが分かる。坪井は C^1 級微分同相群の構造の研究や直線 R や円周 S^1 の同相群の力学的研究、閉区間 $[0, 1]$ の同相群のいろいろな部分群の一樣完全性の解明を皮切りに、一般の多様体に対する微分同相群の一樣完全性および一樣単純性、さらには解析的微分同相群の構造の研究を行った。Thurston, Banyagaらは体積、接触構造やシンプレクティック構造を保つ微分同相群の研究を行っている。また、Gambaudo, Ghys, Entov, Burago, Ivanov, Polterovich、坪井らによる交換子長や安定交換子長に関する研究があり、一樣完全性や交換子長についての研究や幾何構造を保つ微分同相群の構造を解明する研究はこれらの同一線上にあり、幾何構造が微分同相群にどのような影響を与えているかを解明する上で意義深いものと思われる。

2. 研究の目的

微分同相群およびその部分群の位相的、代数的構造の研究は多様体の分類理論や葉層構造論の研究と深く関係している。本研究の目的は、幾何構造をもつ多様体に対してその構造を保つ微分同相群の群構造に焦点をあてて考察することにより、その幾何構造の特性を解明することである。その群が完全であるか、一樣に完全であるか、や交換子長の様相はその幾何構造に実り多い情報を与えている。

本研究では主に次の3点について研究を行った。

- (1) 幾何構造を保つ微分同相群の代数的性質、特に一樣完全性の解明と交換子長の考察。
- (2) 幾何構造を保つ微分同相群の完全性と単純性の関係の考察。
- (3) 群作用を持つ多様体の同変微分同相群の一樣完全性について考察。

(1)においては、幾何構造として、部分多様体や葉層構造が対象であり、(2)においては、葉層構造に対して、葉を保つ微分同相群の完全性と単純性の関係が対象であり、(3)にお

いては、自由な群作用を持つ多様体の同変微分同相群の一樣完全性が対象である。

3. 研究の方法

幾何構造を保つ微分同相群の構造についての以下の研究を以下のように行った。

- (1) 葉層構造や多様体対を保つ微分同相群の一樣完全性の解明と交換子長の考察。
- (2) 葉層構造に対して、葉を保つ微分同相群の完全性と単純性の関係の考察。
- (3) 群作用を持つ多様体の同変微分同相群の一樣完全性について考察。

① 各種関連の研究集会に出席し、情報収集および研究連絡を行った。具体的には、23年度においては、「全日本トポロジーシンポジウム」、「幾何学シンポジウム」、「リーマン面に関する位相幾何学」、「多様体の平面場と微分同相群 2011」、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」、「冬の力学系研究集会」、「接触構造、特異点、微分方程式およびその周辺」に出席し、情報収集および研究交流を行った。また、「尾鷲微分トポロジー 2011」研究会を主催し、微分同相群とその関連分野についての11の講演を持ち、実りある研究交流および情報交換を行った。また、信州大学特任教授の阿部孝順氏が福井との共同研究として「On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold」と題して講演を行った。さらに、阿部孝順氏と、部分多様体を保つ多様体の微分同相群が非一樣完全になる例について研究連絡を行い、実り多い議論が出来た。

24年度においては、ポーランドのLodz大学で開催された「Foliations 2012」国際研究集会に出席し、葉層構造における力学的研究や幾何構造を保つ微分同相群に関する研究情報の交流を行った。また、阿部孝順氏が福井との共同研究として「Uniform perfectness of diffeomorphism groups and its applications」と題して講演を行った。「鳥羽微分トポロジー2012研究会」を主催し、微分同相群と関連分野についての12の講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。阿部氏が福井との共同研究として「Uniform perfectness of diffeomorphism groups and its applications」と題して講演を行った。その他、「全日本トポロジーシンポジウム」、「葉層構造と微分同相群 2012」、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」、「接触構造、特異点、微分方程式およびその周辺」に出席し、情報収集および研究交流を行った。

25年度においては、「Geometry and Foliations 2013」国際研究集会に出席、幾何構造を保つ微分同相群に関する研究交流

や情報交換を行った。また、福井との共同研究である結果を阿部氏が「On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold」と題して講演を行った。また、「尾鷲微分トポロジー2013」研究会を主催し、微分同相群とその関連分野についての13の講演を持ち、実りある研究交流および情報交換を行った。また、阿部氏との共同研究として「部分多様体を保つ微分同相群の一樣完全性の特徴づけ」と題して講演を行った。その他、「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」、「全日本トポロジーシンポジウム」、「幾何学シンポジウム」、「接触構造、特異点、微分方程式およびその周辺」、「冬の力学系研究集会」、「不動点定理とその周辺」、「トポロジーセミナー」に出席し、情報収集および研究交流を行った。

②毎年、研究資料・図書による知識の獲得および研究会において、専門的知識の提供を受けた。

③研究会の開催による研究交流、情報収集により、実り多い議論を行った。具体的には、23年度においては、8月に「尾鷲微分トポロジー2011」研究会を主催し、微分同相群と関連分野についての11つの講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は山岸義和・伊藤敏和（龍谷大）、足助太郎（東京大）、佐藤肇、松木敏彦（龍谷大）、森淳秀（大阪大）、松田能文（東京大）、石田智彦（東京大）、吉安徹（東京大）、粕谷直彦（東京大）、高村正志（青山学院大）、阿部孝順（信州大）・福井和彦の各氏であった。

24年度においては、8月に「鳥羽微分トポロジー2012」研究会を主催し、微分同相群と関連分野についての12の講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は矢ヶ崎達彦（京都工芸繊維大）、松木敏彦（龍谷大）、足助太郎（東京大）、佐藤肇、森淳秀（大阪市大）、松田能文（東京大）、門田直之（京都大）、足立真訓（名古屋大）、笠川良司（日本大）、濱野佐知子（福島大）、阿部孝順（信州大）・福井和彦の各氏であった。

25年度においては、8月に「尾鷲微分トポロジー2013」研究会を主催し、微分同相群と関連分野についての13の講演を持ち、実りある研究連絡および情報交換を行った。講演者は矢ヶ崎達彦（京都工芸繊維大）、松木敏彦（龍谷大）、足助太郎（東京大）、佐藤肇、森淳秀（大阪市大）、松田能文（京都大）、石田智彦（東京大）、吉安徹（東京大）、足立二郎（北海道大）、野澤啓（立命館大）、加藤直樹（芝浦工大）、阿部孝順（信州大）、阿部孝順（信州大）・福井和彦の各氏であった。

④各種の研究集会で研究成果の発表を行った。

4. 研究成果

幾何構造を保つ微分同相群の構造について、特に、葉層構造に対して、葉を保つ微分同相群の完全性と単純性の関係からの考察、葉層構造や多様体対を保つ微分同相群の一樣完全性の解明と交換子長の考察、および自由な群作用を持つ多様体の同変微分同相群の一樣完全性について考察を以下のように行った。

成果として、

(1) 葉層多様体について、葉を保つ微分同相群が単純群になる条件をこの群が完全群であることを用いて、特徴付けた。具体的には、 F をコンパクト多様体 M 上の葉層、 $D_L(M, F)$ を F の葉を保つ微分同相群の単位連結成分とする。このとき、 $D_L(M, F)$ が単純群である必要十分条件は F の葉が全て稠密であることを示し、論文として出版した。

(2) 葉層多様体について、葉を保つ微分同相写像の交換子長について考察した。具体的には、 F をコンパクト多様体 M 上の葉層、 $D_L(M, F)$ を F の葉を保つ微分同相群の単位連結成分とするとき、坪井やRybickiにより、この群は完全群であることが知られている。このとき、どのような葉層多様体について、 $D_L(M, F)$ が一樣完全群になるかを考察した。1次元葉層に対し、一般的な結果を解明し、特に2次元トーラス上の1次元葉層に対して、葉を保つ微分同相群の単位連結成分が一樣完全群である必要十分条件は全ての葉が稠密であるときであることを示した。特に全ての葉が稠密であるとき、 $D_L(T^2, F)$ の元は高々6個の交換子の積で書けることも示した。さらに、球面 $S^1 \times S^n$ 上の $\{pt\} \times S^n$ を葉とする葉層多様体についても葉を保つ微分同相群の単位連結成分の一樣完全性の考察を行い、 n が2以上のとき、この群は一樣完全であり、実際、高々8個の交換子の積で書けることも示し、論文として出版した。

(3) 先行論文において、多様体対 (M, N) に対して、 N を保存する M の微分同相群の連結成分は $\dim N > 0$ の場合、完全群であることを示し、さらに境界を持つ多様体に対して、一樣完全性について考察したが、一樣完全群であることを一般的に示すには、条件が欠落していることが判明した。本研究において、この補完と更なる考察を行った。

具体的には、 N を m 次元コンパクト多様体 M の n 次元部分多様体とし、 $D(M, N)$ を N を保存する M の微分同相群の連結成分、 $D(N)$ を N の微分同相群の連結成分とし、 $\pi: D(M, N) \rightarrow D(N)$ を制限による上への準同型写像とする。このとき、 $D(N)$ と $D_c(M - N)$ が一樣完全群で、 $\ker \pi$ が有限個の連結成分からなるなら、 $D(M, N)$ は一樣完全群であることを示した。証明の方法は π が局所自明ファイバー束であることを用いて、 $D(M, N)$

の元を局所的に分解することにより、なされる。

この応用例として、 m 次元円板 D^m について、 m が4でないとき、 $D(D^m, S^{m-1})$ は一様完全群であることが分かる。更に、 N を3次元球面 S^3 内の Hopf link とするとき、 $D(S^3, M)$ も一様完全群であることが分かる。 $\ker \pi$ が無限個の連結成分になりうる典型的な多様体として、円周たちの互いに素な和集合について考察する。このとき、 $D(M, N)$ から実数 \mathbf{R} への非自明な擬準同型を構成することによって、 $\ker \pi$ が無限個の連結成分のとき、 $D(M, N)$ が一様完全群でないことを示した。これらにより、 N が1次元多様体の場合、 $D(M, N)$ の一様完全性を完全に特徴づけることが出来た。

この応用として、 $M = S^1 \times [0, 1]$, $N = \partial(S^1 \times [0, 1])$ について、 $D(M, N)$ は一様完全群でないことが分かる。これらの結果は論文として出版した。

また、3次元球面 S^3 内の knot K について、 $D(S^3, K)$ が一様完全群である特徴づけの知見を得ている。

(4) 更に(3)の結果を踏まえて、 M が向き付け可能な閉曲面、 N を k 個の円周たちの互いに素な和集合について、 $D(M, N)$ が一様完全群である条件を特徴付けた。具体的には、 $M = S^2$, $k=1$ または $M = T^2$, $k=1$ かつ N が T^2 の基本群の非自明な元を表すときのみ、 $D(M, N)$ は一様完全群である。更に、この結果を高次元に拡張した。これらの結果は論文として出版した。

(5) 群作用を持つ多様体の同変微分同相群の完全性について、主 G 束 M に対し、 $D_G(M)$ は完全群であることは、阿部-福井、Banyaga により示されている。本研究において、いつこの $D_G(M)$ が一様完全群になるかを考察し、知見を得た。具体的には、軌道多様体が3次元以下の場合、この群の一様完全性を特徴付けた。また、一般の場合は、軌道多様体の微分同相群の一様完全性と関連付けられることを示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- ①阿部孝順、福井和彦 : Characterization of the uniform perfectness of diffeomorphism group preserving a submanifold, *Foliations* 2012, 査読有, 2013, 1-8
- ②阿部孝順、福井和彦 : Erratum and addendum to “Commutators of C^∞ -diffeomorphisms preserving a submanifold”, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, Vol. 65-4, 2013, 1329-1336
- ③福井和彦 : Commutator length of leaf preserving diffeomorphisms, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 査読有, Vol. 48-3, 2012, 615-622
- ④福井和彦 : The necessary and sufficient condition for the group of leaf preserving

diffeomorphisms to be simple, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, 2012, 181-184

[学会発表] (計 5 件)

- ①阿部孝順、福井和彦 : On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold, *Geometry and Foliations* 2013, 東京大学(東京都) 2013年9月13日
- ②阿部孝順、福井和彦 : 部分多様体を保つ微分同相群の一様完全性の特徴づけ, 「尾鷲微分トポロジー2013」研究集会, 尾鷲市立中央公民館(三重県尾鷲市) 2013年8月19日
- ③阿部孝順、福井和彦 : Uniform perfectness of diffeomorphism groups and its applications, 「尾鷲微分トポロジー2012」研究集会, 鳥羽市民文化会館(三重県鳥羽市) 2012年8月6日
- ④阿部孝順、福井和彦 : Uniform perfectness of diffeomorphism groups and its applications, *Lodz(Poland)*, 2012年6月27日
- ⑤阿部孝順、福井和彦 : On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold, 「尾鷲微分トポロジー2011」研究集会, 尾鷲市立中央公民館(三重県尾鷲市) 2011年8月23日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福井 和彦 (FUKUI, Kazuhiko)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号 : 30065883