様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４０１１５

研究課題名（和文）指数位相により定まる写像空間とホモトピー不変量の研究

研究課題名（英文）Studies on function spaces defined by the exponential topology and homotopy invariants

研究代表者
小田　信行（ODA, Nobuyuki）

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：８０１１２２８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：ブラウン・ブース・ティロットソン理論が基点付位相空間の間の写像空間のホモトピー論に応用された．基点付指数写像を用いることにより，基点に対する条件を付けずに関数空間のペアリングの理論が証明された．対写像のホモトピー類が定義され，その応用例が得られた．サイクリック元を保つ写像のホモトピー集合がモノイドや群となる場合の条件が得られた．双対の理論も得られた．位相空間の一般化として作用子をもつ集合が定義され様々な公式と例が得られた．位相空間において研究されていた極大開集合と極小開集合の理論の一般化が得られた．

研究成果の概要（英文）：The Brown-Booth-Tillotson theory was applied to homotopy theory of function spaces of based topological spaces. Making use of the exponential function for based spaces, the theory of pairing was proved without conditions for base points. The set of homotopy classes of pair maps was defined and applications of it were obtained. Conditions were obtained for the homotopy set of cyclic elements preserving maps to be monoids or groups. The dual theory was also obtained. The set with operations was defined as a generalization of the topological space and various formulas were obtained. A generalization of the theory of maximal open sets and minimal open sets in the topological spaces was obtained.

研究分野：数学・幾何学

キーワード：幾何学　トポロジー

１．研究開始当初の背景

ホモトピー不変量を研究する上で重要なホモトピー論における双対性の研究は，1950 年代後半のエックマンとヒルトンの一連の研究から始まったが，それらの成果を踏まえたヒルトンの本(1965)により一応の体系化された枠組みが認識された．しかしながら，エックマン・ヒルトン双対性はホモトピー論において完全な（圏論的な意味での）双対性が成立していることを主張しているのではなく，その双対性の成立しない様々な定理群が重要な幾何学的意味をもつことが認識されていて，現在でも大きな研究対象となっている．そこには写像空間の指数法則が介在していることが分かる．例えば，懸垂空間と閉道空間がホモトピー論におけるエックマン・ヒルトン双対性を与える空間の構成方法として対応している．閉道空間は写像空間であり，エックマン・ヒルトン双対性を通して写像空間の位相の重要性がわかるが, 戸田積，ホップ不変量の一般化，ゴットリーブ群の一般化とその双対を研究する場合にガンマ閉道空間等の写像空間の位相の研究が必要となる．ホモトピー不変量の研究には，基点付位相空間を考察することが必要である．基点付位相空間の圏においても，指数写像の全単射対応が任意の基点付位相空間に対して成立することが平嶋・小田により最近証明された．ここに現れる写像空間はホモトピー論を展開する上で必要な性質を備えているだけでなく，写像空間のペアリングを研究するのに不可欠な２つの自然な写像も任意の基点付位相空間に対して同相であることが証明されているので，この位相を用いて双対性の研究を進展させる理論的基礎ができているといえる．

２．研究の目的

指数写像が任意の位相空間に対して全単射対応となるとき，このような写像空間の位相は一意的に定まり，指数位相と呼ばれる．　ブラウン・ブース・ティロットソンにより導入された直積集合の位相と指数位相を用いて定義される写像空間とが非常に良い対応をしていること，すなわち，指数写像（通常の直積空間と同じく，随伴写像を対応させる写像）は，任意の位相空間に対して全単射であることが最近，平嶋・小田の研究により示された．この定理により得られた指数法則は，任意の位相空間に対して成立しているので従来は空間に様々な条件を付けて成立することが証明されていたいくつかの有用な古典的な定理の拡張を可能にするだけでなく，基点付位相空間の間の基点を保つ連続写像の集合に大変良い性質をもつ位相を導くことが判明しつつある．

本研究では，新しく定義された指数位相を用いて写像空間の位相の性質を解明し，そのホモトピー不変量への応用，具体的には，ゴットリーブ群を用いた写像の類の決定，２次結合とホップ不変量の関係，空間の分解に関する定理，非安定周期族の存在と非存在，空間の LS カテゴリーの決定，同変空間の間の写像空間の性質の解明等の研究を行う．写像空間の位相は，エックマン・ヒルトン双対性を通して理論的に重要な役割を担う．

３．研究の方法

ブラウン・ブース・ティロットソンの理論を基点付位相空間の圏で詳しく研究し，ホモトピー論における双対性に関するエックマン・ヒルトン双対性の理論も視野に入れて研究する．ブラウン・ブース・ティロットソン積の非対称性から非常に良い位相空間のクラスが定義できることが平嶋・小田の研究により知られているが，このクラスの位相空間に対してホモトピー論を研究し，ホップ不変量と戸田積及び対角写像との関係を解明する．箱積の双対の概念を一般コホモロジー論へ応用する．有理空間に対して代数的モデルを用いて m ペアリングと n コペアリングを研究する．LS カテゴリーへの応用，リー群とその一般化に対する応用を研究する．ブラウン・ブース・ティロットソン理論に関する基礎理論を発展させる．特に，基点付位相空間の圏での理論はまだ解決すべき点があり，この研究では「便利な圏」として必要な性質を研究する．そのために，ブラウン・ブース・ティロットソン積の非対称性を用いて平嶋・小田により定義された非常に良い性質をもった位相空間の大きなクラスを研究し，ホモトピー論における双対性を研究するためのより広い圏を定義することを試みる．この圏において有用な古典的な結果の拡張も視野に入れて研究を進める．一定の条件を満たすファイバー列に付随したホップ不変量とその双対の理論を考察し，ホモトピー不変量の研究に応用する．２次結合とホップ不変量の関係を解明する．箱積の双対は，以前，ザブロドスキーがコホモロジー論へ応用を試みているが，コホモロジー論への応用も視野に入れて研究する．応用として様々な空間の非安定周期族の構成を研究する．Γ懸垂空間とΓ閉道空間の双対性を研究する．この構成方法については，Γ安定圏の理論も考察する．ホモトピー論の研究のために開発された写像空間の位相は，同変空間の間の写像空間の性質の解明に役立つことが認識され始めているので，同変空間

に対して写像空間の位相を調べる.

4．研究成果

次のような研究成果を得た.

（1）指数位相により定まる写像空間の位相に関しては，基点付位相空間の圏において，ブラウン・ブース・ティロットソン理論を研究し，本研究の理論が写像空間のホモトピー論及び同変空間の間の写像空間の理論に応用できることが示された．特に，基点付指数写像を用いることにより，基点に対する条件を付けずに関数空間のペアリングの理論が構築できることが示された．また，写像空間への群作用については，空間の新しいクラスを定義することによりそれらのクラスに属する群の作用が連続であることが得られた．さらに，極限と余極限の理論に対しても，我々の理論を応用することができた.

（2）ブラウン・ブース・ティロットソン積を用いて定義される位相空間のクラスの研究により，代数的位相幾何学を研究するための圏として，従来 k 空間の圏として知られていた位相空間の圏よりも広い位相空間の圏を定義することができた．この圏は，k 空間の圏を含むので，従来の k 理論より優れた圏であることが期待されるが，ブラウン・ブース・ティロットソン積を用いて定義される位相空間のクラスは多くの結果とともに検討課題も多く存在することが分かった.

（3）ホモトピー不変量に関しては，2 次と 3 次の戸田積について結果を得た．古典的な戸田積に関する戸田の公式の圏論的な証明も研究し，圏論的定式化が可能であることが確認された．さらに，懸垂空間に対して示されていた戸田の公式の拡張として，余ホップ空間およびホップ空間と戸田積との関係について新しい公式が得られた．その証明に用いられた手法が前行列戸田積および後行列戸田積の非決定因子の計算に有効であることが示されたことは大きな成果である.

（4）連続写像のホモトピー集合の中でゴットリーブ群をゴットリーブ群に移す写像の全体を考えると1つの部分集合が定まるが，ここでは一般化されたゴットリーブ群を用いて写像の類を定義し様々なホモトピー不変集合を得た．この研究のため対写像のホモトピー類を定義し，いくつかの例について具体的に決定することができた．この対写像はヒルトン等の定義した対写像とは異なるものであるが，この新しく定義された対写像のホモトピー類は以後の理論の展開に不可欠であり，その応用例を得た．一般化されたゴットリーブ群を用いて新しく定義された写像の類の集合のモノイドとしての性質や群となる場合の条件が得られた．特にコファイバー列に対して重要ないくつかの例が得られた.

（5）3 次のホモトピー作用素に関しては，具体的な例を構成するために現在知られている3次の戸田積について研究を進めた．特に 3 次の戸田積について大石の結果をカテゴリーの視点から明確化し定義の一般化を行うことを目標として研究を行ったが，そのために多くの行列戸田積を決定した.

（6）ルターの写像の性質を詳しく調べることにより箱積の非決定因子が弱い条件の下で通常のホモトピー集合で記述できることが示され，定式化された.

（7）写像空間への群作用に関して，ブラウン・ブース・ティロットソン積の中心化クラスの概念を用いて同変空間の指数法則の定式化が得られた．すなわち，作用する群に対し，その群の中心化空間の族を定義し，この中心化空間の族は k 空間を含むことを証明した．さらに，一定の条件の下でブラウン・ブース・ティロットソン積は同変空間となり指数写像はその群の中心化空間に対して同変同相写像となることが証明できた.

（8）ゴットリーブ群を保つ写像のなす集合に関する共同研究は論文として 2013 年に発表されているが，双対の概念であるコゴットリーブ群を保つ写像に関して共同研究を進め双対の結果を得た．ゴットリーブ群は写像空間による特徴づけが可能であるので様々な良い性質が写像空間の性質を用いて導かれるのに対して，コゴットリーブ群は対応する議論が困難であるのでそれに代わる研究が必要であるが，コゴットリーブ群を保つ写像に関しても写像の類を定義し様々なホモトピー不変性を調べ，対写像のホモトピー類を応用して，モノイドとしての性質や群となる条件が得られ，野村の完全列等を用いて非自明な例が得られた.

（9）一般化された高次の戸田積に関して，n タイプの 3 次のホモトピー作用素を定義し，具体的な例を構成した．球面のホモトピー群を用いて構成したが，実際の計算は不確定部分の決定が大変難しいことが確認できた．応用する場合は，不確定部分が自明になるような空間を選定し，コホモロジー群との関係を用いて計算することで新しい結果が得られると思われる.

（１０）写像空間の位相に関して，平嶋・小田の共同研究により，ブラウン・ブース・ティロットソン積の応用を研究し，ダイダックの積等とブラウン・ブース・ティロットソン積との関係の解明に成功した．基本的な結果として，アレク

サンドルフ空間に対する結果を用いて，ナイト・モラン・ピムの結果やダイダックの結果とブラウン・ブース・ティロットソン積との関係を解明した．さらに，ダイダックの反射空間の概念を拡張し，空間が拡張された意味での反射空間であることと空間が中心化空間であることが同値であることが示された．

（１１）コゴットリーブ群を保つ連続写像についての様々な定理が得られたが，余直交関係を保つ連続写像に拡張した．特に，対写像とファイブレーションとの関係に関して興味深い結果が得られた．コホモロジー群からの写像とコゴットリーブ群からの写像は詳しく調べることができ，それらが定義されるための条件と準同型写像になるための条件や全射写像になるための条件が示された．

（１２）笠原は集合族に対して作用子を定義し，位相空間における様々な問題に作用子を応用しているが，さらに一般的な応用を試みる場合は笠原による作用子の定義を拡張する必要がある．笠原の作用子を拡張するとともに，その拡張が位相空間の一般化に応用出来ることを示した．すなわち，位相空間の一般化として作用子をもつ集合を定義し，その集合の内部と閉包を定義し，様々な公式と例を得た．特に，２種類の内部と閉包を定義する必要があることが示された．すなわち，作用子そのものを用いて定義されるものと，作用子から定まる「開集合」を用いて定義される２種類の内部と閉包が定義可能であり，それらは本質的に異なる．しかし，開集合との関係，古典的な公式の拡張，内部と閉包の相互の関係を与える公式等が導き出される．様々な例を調べて，これらの違いを研究した．作用子をもつ集合においても極大開集合と閉包との関係も得られ，さらにプレ開集合やセミ開集合も定義されそれらの間の関係も得られた．

（１３）作用子をもつ集合における極大開集合，極小開集合，極大閉集合及び極小閉集合を公理論的な見地から定式化し，位相空間において研究されていた極大開集合，極小開集合，極大閉集合及び極小閉集合の理論の一般化が得られた．具体的には，集合の部分集合族に対して，極大対象と極小対象を定義し，それらがみたす条件を，「有限和で閉じている」，「有限共通部分で閉じている」，「無限和で閉じている」，「無限共通部分で閉じている」という公理の下で様々な結果を示した．これらの公理は集合の束における条件であり位相空間だけで定義されるものではないのでこのような一般化を行った．応用として，作用子をもつ集合における極大開集合と極小閉集合の結果を導いた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① J.-R. Kim and <u>N. Oda</u>, Cocyclic element preserving pair maps and fibrations, Topology and its Applications, 査読有, 191 (2015), 82－96.

② F. Nakaoka and <u>N. Oda</u>, Maximal objects and minimal objects in the sets with operations, Fukuoka University Science Reports , 査読無, 45 (2015), 1－7.

③ F. Nakaoka and <u>N. Oda</u>, Interiors and closures in a set with an operation, Communications of the Korean Mathematical Society, 査読有, 29 (2014), 555－568.

④ J.-R. Kim and <u>N. Oda</u>, The set of cyclic-element preserving maps, Topology and its Applications, 査読有, 160 (2013), 794－805.

⑤ H. Kihara and <u>N. Oda</u>, Homotopical presentations and calculations of algebraic K_0-groups for rings of continuous functions, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, , 査読有, 48 (2012), 5－82.

⑥ N. Iwase, M. Mimura, <u>N. Oda</u> and Y. S. Yoon, The Milnor-Stasheff filtration on spaces and generalized cyclic maps, Canadian Mathematical Bulletin, , 査読有, 55 (2012), 523－536.

〔学会発表〕（計３件）

① Jae-Ryong Kim and <u>Nobuyuki Oda</u>, Cocyclic elements preserving maps, 2015 年２月 20 日，ホモトピー論における有限と無限，於 九州大学西新プラザ（福岡県，福岡市）

② Y. Hirashima and <u>N. Oda</u>, Topologies of function spaces and group actions, 2013年9月1日，位相空間論とその応用，於 熊本高専 （熊本県，八代市）

③ <u>Nobuyuki Oda</u> (Tuesday, March 19, 2013): Brown-Booth-Tillotson products and exponentiable spaces, Topology Seminar at The Ohio State University, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A.

６．研究組織
(1)研究代表者
小田 信行　（ODA，Nobuyuki）
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：80112283