

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 21 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540132

研究課題名(和文)多種粒子系の格子気体の流体力学極限

研究課題名(英文)Hydrodynamic limit for multi-species exclusion processes

研究代表者

永幡 幸生(NAGAHATA, Yukio)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：50397725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：気体の簡略化モデルである格子気体のうち特に多種粒子系を扱い、そのスケール極限である流体力学極限の証明を行った。この証明は3段階に分かれるが、1段目と2段目に相当する「スペクトルギャップの評価」、「中心極限定理の分散」の部分の証明を行った。しかし、3段目の「極限の方程式の性質」の部分は残されている。

またこのモデルと共通点の多い、「ジャンプ率が退化した粒子系」に関しても同様の結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We studied the hydrodynamic limit for multi-species lattice gas model, which is a simplified model for large scale interacting particle systems. The proof of the hydrodynamic limit is divided into three parts. We proved first and second parts, "an estimate of the spectral gap" and "the central limit theorem variance". However third part, "properties of limiting equation", is not proved.

We also obtained similar results for "exclusion process with degenerate rates", which has similar properties to multi-species lattice gas model.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論, 統計数学)

キーワード：流体力学極限 格子気体

### 1. 研究開始当初の背景

流体力学極限の研究は、(巨視的な)流体の運動を、流体を構成している(微視的な)粒子系の運動法則から理解しようとする試みです。相互作用をしながら、ランダムに運動をしている粒子系でも、時間 空間に対して「良い」スケール変換を試みれば決定論的なダイナミクス(流体の方程式)に従って時間発展しているように見えます。このように超多体系から時間 空間に対して「良い」スケール変換をすることにより決定論的な方程式を導出することを総称して「流体力学極限」と呼びます。多くの格子気体モデルで流体力学極限が取り扱われてきましたが、「多種粒子系」は取り扱いが困難で残されていた問題であると同時に、解決すべき問題です。

### 2. 研究の目的

本研究では(実際の気体のように)多種粒子で構成される格子気体を考え、その流体力学極限の導出を数学的に厳密に行います。本研究では流体力学極限の導出を以下のような3つの問題に切り分け進めていきます:(1) スペクトルギャップの評価。(2) 中心極限定理の分散:ある関数空間の特徴付け。(3) 拡散係数の滑らかさ。これらの3つをまとめることにより多種粒子系の格子気体の流体力学極限を数学的に厳密に行います。

### 3. 研究の方法

Varadhan の手法に従って順に以下の3点に分けて多種粒子系の格子気体の流体力学極限を導出していきます。

(1) スペクトルギャップの評価。

(2) 中心極限定理の分散:ある関数空間の特徴付け。

(3) 拡散係数の滑らかさ。

またコンピュータシミュレーションを行うことで各種物理量を予想することにより、多種粒子系の格子気体の流体力学極限を導きます。

### 4. 研究成果

気体の簡略化モデルである格子気体のうち特に多種粒子系を扱い、そのスケール極限である流体力学極限の証明を行いました。この証明は研究の方法にあるような3段階に分かれますが、1段目と2段目に相当する「スペクトルギャップの評価」、「中心極限定理の分散」の部分の証明を行いました。しかし、3段目の「拡散係数の滑らかさ」は解決されましたが、新たに「極限の方程式の性質」の証明が加わり、この部分は残されています。またこのモデルと共通点の多い、「ジャンプ率が退化した粒子系」に関する結果を得ることができました。詳細は以下の通りです。

(1) 多種粒子系のスペクトルギャップについて。この問題は Caputo, Dermoune-Heirichらにより部分的に結果が得られていましたが、今回の研究で一番自然なモデルを含む、かなり一般的な仮定のもとスペクトルギャップの漸近挙動を得ることができました。一種の粒子系ではおこらなかった、多種の粒子達にブロックされて、ある粒子の運動が非常に遅くなることが予想されていました。実際にこのスペクトルギャップの評価にはこのことを肯定的に示唆する粒子数密度が含まれています。このような評価を得ることは困難でありましたが、今回の結果により他のモデルへの適用などが期待されます。またテクニカルではありますが、「moving particle lemma」と呼ばれる補題を、一般的な条件の下で与えたことは重要な結果です。また「moving particle lemma」がうまく働かず、結果として違う漸近挙動を取ることが予想される判例を構成することにも成功しました。全体として国内外を問わず意味のある結果です。

(2) 中心極限定理の分散について。この問題は基本的には Varadhan の手法に基づいておりますが、多種粒子系になると今までスカラ量で考えていたものを粒子の種類次元を持つベクトル量で考える必要があります。このように考えるのは自然ではありませんが、実際に今までの手法が使えるのかは不明でした。今回の研究で、かなり複雑になりますが、本質的には従来の手法が使えることが分かりました。こちらも他のモデルへの応用が期待されます。

(3) 極限の方程式について。まず極限の方程式に表れる係数に関しては、研究代表者が他のモデルで行った手法がこちらの場合でも応用可能であることを得ました。一方で極限の方程式の性質、特に「最大値原理」が成立していると思われませんが、実際に証明することはできませんでした。こちらに関しては今後の課題のうち最大のものです。

(4) ジャンプ率が退化した粒子系のスペクトルギャップについて。この問題は(1)の問題と共通部分が多く、この研究に加えられました。実際にジャンプ率が退化していくところでスペクトルギャップの評価が悪くなることが予想されていました。今研究でこのスペクトルギャップの下からの評価を得ることができました。ジャンプ率が退化しているところをいかにして除外するかがこの問題の鍵になりましたが、(1)の問題で考えていたことが多く応用できました。この結果は国内外を問わず、非常に意味のある結果です。一方でこの結果は後の(5)で使うには十分な結果ではありませんが、上からの評価としては下からの評価とは違うオーダーがでてきます。実際にこれらの評価は共に鋭い評価ではないと予想されます。この鋭い評価は多少良くなると思われませんが、数学的なステートメントを作ること自体が自明でない問題だ

と思われます。このいかに数学的に意味のあるステートメントを作るか自体が今後の課題と言えます。

(5) ジャンプ率が退化した粒子系の中心極限定理の分散について。こちらも(2)と共通部分が多く、(4)で得られたスペクトルギャップの評価をいかにして使うかが鍵になりました。Uchiyama が他のモデルで使用した手法を応用することができました。これ以外にも様々なアイデアを応用することで証明をすることができました。こちらも他のモデルへの応用が期待されます。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

- (1) Y. Nagahata Lower bound estimate of the spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, Electronic Journal of Probability 査読あり 17, 2012, 1-19 DOI 10.1214/EJP.v17-1916
- (2) Y. Nagahata, M. Sasada Spectral gap for multi-species exclusion processes, Journal of Statistical Physics 査読あり 143, 2011, 381-398 DOI 10.1007/s10955-011-0176-0

[学会発表](計 12 件)

- (1) Y. Nagahata, On hydrodynamic limit for simple exclusion process with degenerate rates, 12<sup>th</sup> work shop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 平成 25 年 11 月 21-23 日 東京大学
- (2) Y. Nagahata, On hydrodynamic limit for simple exclusion process with degenerate rates, マルコフ過程とその周辺 平成 25 年 11 月 14-16 日 東北大学
- (3) Y. Nagahata, On hydrodynamic limit for simple exclusion process with degenerate rates, Dirichlet forms and applications, 平成 25 年 9 月 9-13 日 Universitat Leipzig
- (4) Y. Nagahata, 流体力学極限について, 計算材料科学と数学の協働によるスマート材料デザイン手法の探索 平成 25 年 3 月 15-17 日 東北大学
- (5) Y. Nagahata, Lower bound estimate of spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, Markov chains on graphs and related topics 平成 25 年 2 月 12-15 日 京都大学
- (6) Y. Nagahata, Functional central limit theorem for tagged particle dynamics in stochastic ranking process, マルコ

フ過程と確率解析 平成 25 年 1 月 11-13 日 京都大学

- (7) Y. Nagahata, Functional central limit theorem for tagged particle dynamics in stochastic ranking process 無限粒子系、確率場の諸問題 VIII 平成 24 年 10 月 20-21 日 奈良女子大学
- (8) Y. Nagahata, Lower bound estimate of spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, 11<sup>th</sup> work shop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 平成 24 年 7 月 5-6 日 東京大学
- (9) Y. Nagahata, Scaling limit for multi-species exclusion processes, The 2<sup>nd</sup> Institute of Mathematical Statics Asian Pacific Rim Meeting, 平成 24 年 7 月 2-4 日 Tsukuba International Congress Center
- (10) Y. Nagahata An estimate of spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, 数理物理と確率解析 平成 24 年 3 月 12-14 日 湘南国際村センター
- (11) Y. Nagahata An estimate of spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, マルコフ過程と関連する話題 平成 23 年 1 月 4-6 日 KKR 鹿児島敬天閣
- (12) Y. Nagahata An estimate of spectral gap for simple exclusion process with degenerate rates, 無限粒子系、確率場の諸問題 VII 平成 23 年 10 月 15-16 日 奈良女子大学

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永幡 幸生 (NAGAHATA Yukio)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：50397725

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：