

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540171

研究課題名(和文) サポートの分離・併合から見た界面ダイナミクスに対する数値解析

研究課題名(英文) Numerical analysis to support splitting and merging phenomena in interfacial dynamics

研究代表者

友枝 謙二 (Tomoeda, Kenji)

京都大学・情報学研究科・研究員

研究者番号：60033916

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：自然界では相異なる物理状態の境界面に、時々刻々と変化しながら複雑なパターンが現われる。このような現象は 界面ダイナミクスと呼ばれる。本研究では その一つとして非線形濾過性効果を持った空間1次元の初期境界値問題について数値数学的観点から考察し以下の事が得られた：

(1) 数値解を求めるために構成した差分法は 安定且つ収束性を持つ；(2) 初期境界値問題の解は 固定境界条件の時一意的な定常解に収束する；(3) 境界条件の周期が十分長い場合、サポート(浸透領域)の分離・併合の繰り返し現象が現れる；(4) 周期が十分短い場合は、サポートの分離現象が生じない具体例が構成出来た。

研究成果の概要(英文)：Numerical experiments suggest interesting properties in the several fields. Among such properties, there are support splitting and merging phenomena in the behaviour of non-stationary seepage. The model equation in one dimensional space is written in the form of the initial-boundary value problem with the effect of a non-linear filtration.

In this study, such phenomena are realized by use of finite difference schemes, and are justified from numerical and analytical points of view. Thus we obtained following results: (1) Our difference scheme has the property of the stability and the convergence; (2) The solution of the initial-boundary value problem converges to the stationary solution when the boundary conditions are constant; (3) Repeated support splitting and merging phenomena appears when the period of the boundary conditions is sufficiently long; (4) We are able to show some example such that the support splitting phenomena never appears when the period is sufficiently short.

研究分野：偏微分方程式に対する数値解析

キーワード：自由境界サポートの分離・併合 界面ダイナミクス 自由境界 差分法

## 1. 研究開始当初の背景

自然界では相異なる物理状態の境界面 (Interface) に、時々刻々と変化しながら複雑なパターンが現われる。このような現象は界面ダイナミクスと呼ばれ、そのパターンは時間経過とともに複雑な形状を示す。本研究では、その一つとして蒸発過程での浸透領域の変化を扱った。これは、海で囲まれた島の内陸部では蒸発と拡散、その周囲では潮位の周期的変化によって引き起こされる海水の浸透領域を調べる事に通じる。本研究では、このような現実問題の基礎研究として蒸発と拡散とによる相互作用に潮の周期的干満という境界条件を課した時、その浸透領域の変化即ちサポートダイナミクスを数値解析及び数学解析の両面から考察する事にした。

数学解析としてはこの現象の最も簡単な空間1次元モデルである“吸収項を伴う多孔性媒体中の流れを記述する非線形拡散方程式”

$$v_t(t, x) = (v^m)_{xx} - cv^p,$$

( $m > 1, c > 0, 0 < p < 1$ ) が1970年代から今日まで扱われてきた。当時は解の存在と一意性の他には、有限時刻内消滅、サポートの有限伝搬性と比較定理程度であった。

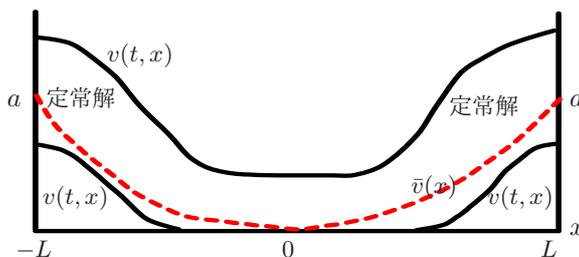
1980年代に入ると Kersner(1980)<sup>①</sup> によって空間1次元の初期境界値問題においてサポートの分離性が示された。 $\mathbf{R}^1$ での初期値問題では、Rosenau と Kamin(1983)<sup>②</sup> が数値計算結果からサポート分離性を示唆した。以後、初期値問題については友枝と中木(2002)<sup>③</sup>, (2009)<sup>④</sup> が差分法を用いてサポート分離を引き起こす初期関数を求める事に成功した。しかし、初期境界値問題でのサポート分離性は Kersner(1980)の結果以外何も得られていない状態であった。研究開始時には境界条件の影響がサポートの挙動にどのように伝わるかを考察した数学的な結果は国内外ともに皆無であった。

以上の事から、境界条件がサポート分離・併合にどの様に影響するかを研究する事は数値解析及び数学解析の発展のみならず得られた知見を工学や環境分野に提供するという意味でも重要であった。

## 2. 研究の目的

本研究では、“蒸発と拡散を伴う流れに現れる浸透領域の変化”を数値的に再現する事に焦点をあてる。具体的には、研究開始当初の背景で述べた非線形拡散方程式を用いて周期的流入・流出を伴う境界条件を課した時に現れるサポートの分離・併合またはその反復性について扱い、このような現象の発生メカニズムを解明する数値計算法を構築するのみならずその数学解析をも確立する。

$\mathbf{R}^1$ での初期値問題の場合は、そのサポートが分離・併合、更にその繰り返し現象を引き起こすようなコンパクトサポート(浸透領域が有界閉集合である事)をもつ初期関数が得られていた(友枝 中木<sup>④</sup>)。しかし、初期境界値問題の場合は、境界条件の与え方によってサポートの挙動が大きく変わる事が予想される。



境界条件 I)  $v(t, \pm L) = a > 0$ : この場合は、 $(-L, a)$ , 原点  $(0, 0)$  と  $(L, a)$  を結ぶ関数  $\bar{v}(x)$  を定常解に持つような定数  $a$  が存在する(図参照)。従って  $v(t, \pm L) < a$  を満たす初期値から出発する解のサポートは分離するが、 $v(0, \pm L) > a$  から出発する解のサポートは分離しない事がそれぞれ期待できる。更に  $t \rightarrow \infty$  とした時、前者はサポートが分離した定常解に、後者はサポートが分離していない定常解にそれぞれ収束する事が予想できる。

境界条件 II)  $v(0, \pm L) = a + b \sin(2\pi\omega t)$ : この場合、サポートは境界条件 I) から推測すると  $\omega \ll 1$  の時は、サポートの分離・併合が繰り返される事が予想できる(図参照)。しかし  $\omega$  を徐々に大きくすると、サポートの分離・併合がやはり繰り返されるのか、それともサポートが常に分離した状態か、または併合した状態かは未だ分かっていない。その理由は、数学解析では予測困難であり、また通常の計算では精度上見極める事が出来ないからである。

本研究では、数学解析だけでは予測できないような性質を見つけ出し解明できるような数値計算法を開発する。以下の事を目的とした。

- (1) 安定性、収束性が数学的に保証された数値計算法の構築。
- (2) (1) で構築した計算法でパラメータ  $\omega$  とサポート分離・併合との関係を調べる。
- (3) (2) で得られた関係について 数学的証明を与える。
- (4) (1) で構築された計算法の空間2次元への拡張を行ない、サポート分離・併合を調べる。

## 3. 研究の方法

研究目的を平成23から26年度で達成するために、以下の事を行った。

- (1) 「Interface を直接近似するサポート追跡法」を構成し、安定性と収束性を確立する。
- (2) これらを用いて境界条件の周期性がサポートの分離・併合及びその繰り返し現象の発生に如何に影響しているかを調べる。得られた数学的性質についてその証明を行う。

特に、「Interface を直接近似するサポート追跡法」のアルゴリズムの技術及びその数値計算精度を検証するための多倍長計算法による支援が必要となった。そのために計算工学を専門とする研究者 倉前宏行(大阪工大)と多倍長計算法の研究者 今井仁司(徳島大 現在 同志社大)の2名を連携研究者として彼等のアドヴァイスに沿って研究代表者が主に研究を遂行した。

[平成23年度]

- (1) 蒸発過程での浸透領域の変化の数理モデル

について、サポート追跡法による計算法を以下の項目に留意して構成した。

① 扱う非線形拡散方程式を放物型、双曲型と常微分の3方程式に分割する。

② それぞれに分割したの方程式の特徴を反映した差分法である事。

③ 精度を上げるために界面の近くでは不等間隔メッシュを採用。

④ 前の時刻メッシュと次の時刻メッシュとの理論的整合性を保つ事。

⑤ 不等間隔メッシュ上での非線形双曲型方程式に対する Riemann 問題の数値解法を構成する。

⑥ 不等間隔メッシュ上での非線形放物型方程式に対する差分法を構成する。

(2) (1) で構成された差分法について数値実験を行うために計算機を導入し 計算と画像処理の準備を行なった。

#### [平成 24 年度]

以下の事を行なった。

(1) 初年度に構成した計算法で、固定境界条件を与えた場合の数値実験。

(2) 数値定常解に収束していく様子 即ち “安定化” が観察されたので 連携研究者のとともにその検証。

(3) (2) に関する数学的証明の準備を行うために定常解の存在と一意性の考察。

#### [平成 25 年度]

(1) 次の2点を数値計算によって調べた。

① 周期の長い境界条件の場合には、サポートは分離・併合を繰り返すか否か。

② 周期の短い境界条件の場合には、サポートは分離するのか否か。

(2) 得られた数値計算法についてその安定性と真の解への収束性についての数学的証明。

(3) (1) で得られた結果について 連携研究者とともにその数値的検証。

#### [平成 26 年度 (最終年度)]

(1) 前年度までに得られた現象特にサポート分離・併合を繰り返す現象とそうでない現象の発生メカニズムについての数学的証明。

(2) 空間2次元に拡張された計算法の構築。

(3) 海で囲まれた島の内陸部の潮汐による浸透領域の変化と本研究で得られた結果との比較。

(4) 4年間の研究成果の纏め。

#### 4. 研究成果

“蒸発と拡散を伴う流れに現れる浸透領域の変化”を記述する“非線形拡散方程式”について以下の事が数学的証明された。

(1) 構成した数値計算法即ち差分法については“初期関数が下に凸の場合、空間メッシュ幅をゼロに収束させると差分解は真の解に収束する”。

(2) この方程式の解について以下の事が証明された。

①  $x = \pm L$  で固定境界条件を与えた時は 定常解が一意に存在し、そのサポートが分離した定常解と非分離の定常解とに分類される(図1, 2, 3の赤と青の曲線参照)。

② 時間  $t$  を無限大にすると 解は ① で述べた定常解にそれぞれ収束する。即ち “安定化” が成り立つ(図1, 2, 3の赤の曲線参照)。

③  $x = \pm L$  での境界条件に周期性を課すると十分長い周期に対して サポートの分離・併合の繰り返しが見れる(図4の赤の曲線参照)。

④  $x = \pm L$  での境界条件の周期を十分短くするとサポートが分離しないで併合したままの数値例が得られた(図5の赤の曲線参照)。このような現象が可能となるような境界条件を比較定理と Galaktionov-Vazquez(1994)<sup>⑤, ⑥</sup> の特殊解を用いて数学的に構成する事が出来た。

(3) 研究で得られたサポートの分離・併合の周期と現実の潮汐の周期とについては 定性的な整合性はあるが実際の物理定数の情報が十分でないので 定量的な一致はまだ得られていない。

全研究期間を通しての成果は主な発表論文等の ①, ②, ③として纏めた。これらの計算法を空間2次元に拡張し その有用性が得られつつある。特に、単連結でない複雑なサポートの出現が期待でき、現在検証中である。

#### < 引用文献 >

① R. Kersner, *Nonlinear Anal.*, **4** (1980), 1043–1062.

② Rosenau, S. Kamin, *Physica*, **8D** (1983), 273–283.

③ T.Nakaki and K.Tomoeda, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002),no.3, 945–964.

④ 友枝謙二, 中木達幸, 日本応用数学会論文集, **19** (2009), 25–37.

⑤ V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, *Commun. in Partial Differential Equation.*, **19**(1994), 1075–1106.

⑥ V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, *Ibid.*, **19**(1994), 1107–1137.

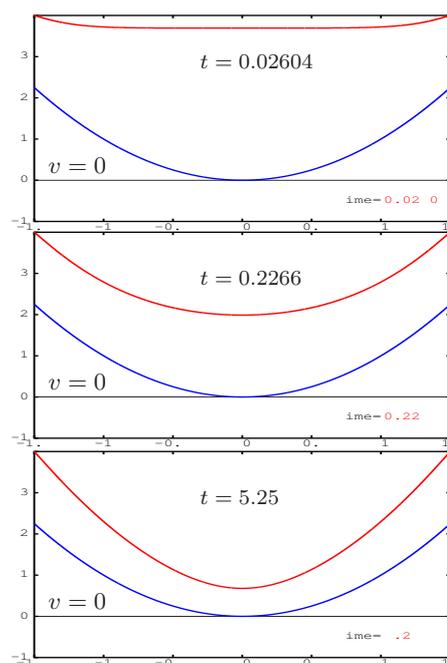


図1. 数値解の定常解への収束, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ , 空間メッシュ幅  $h = \frac{1}{512}$ .

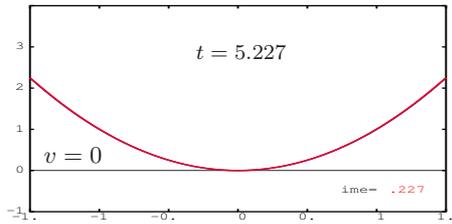
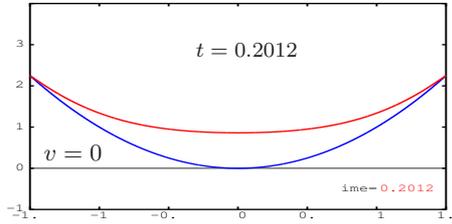
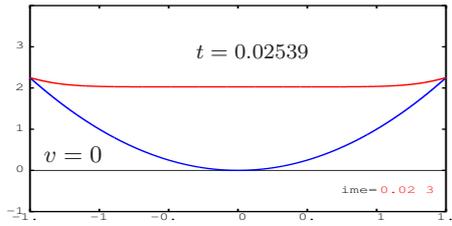


図 2. 数値解の定常解への収束, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ , 空間メッシュ幅  $h = \frac{1}{512}$ .

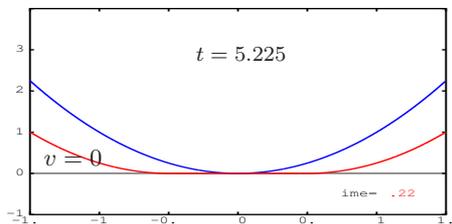
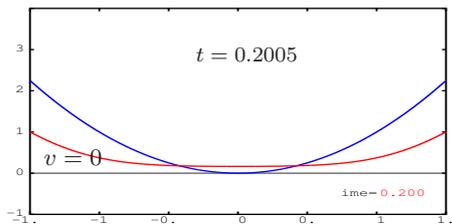
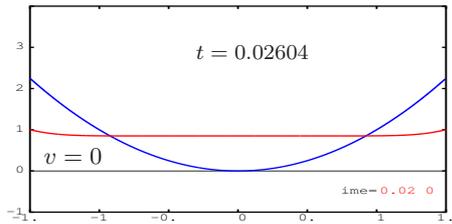


図 3. 数値解の定常解への収束, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ , 空間メッシュ幅  $h = \frac{1}{512}$ .

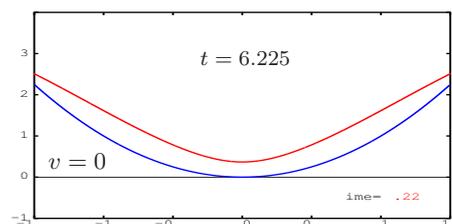
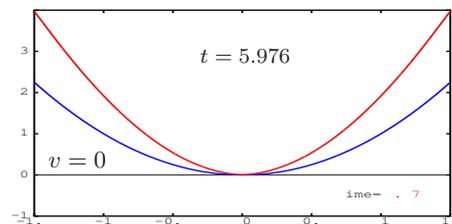
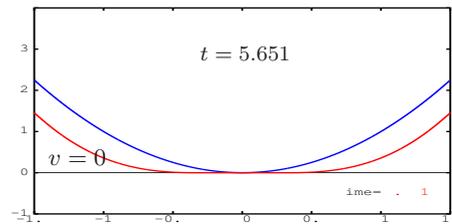
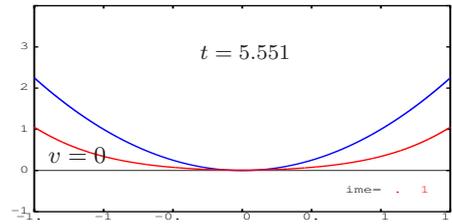
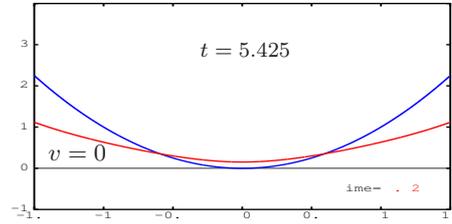
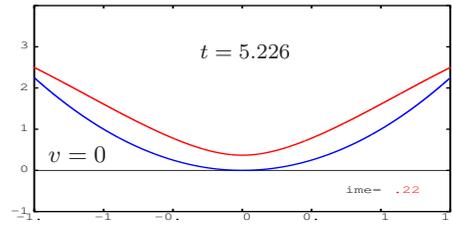


図 4. 数値サポートの分離・併合の繰り返し現象, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ , 空間メッシュ幅  $h = \frac{1}{512}$ .

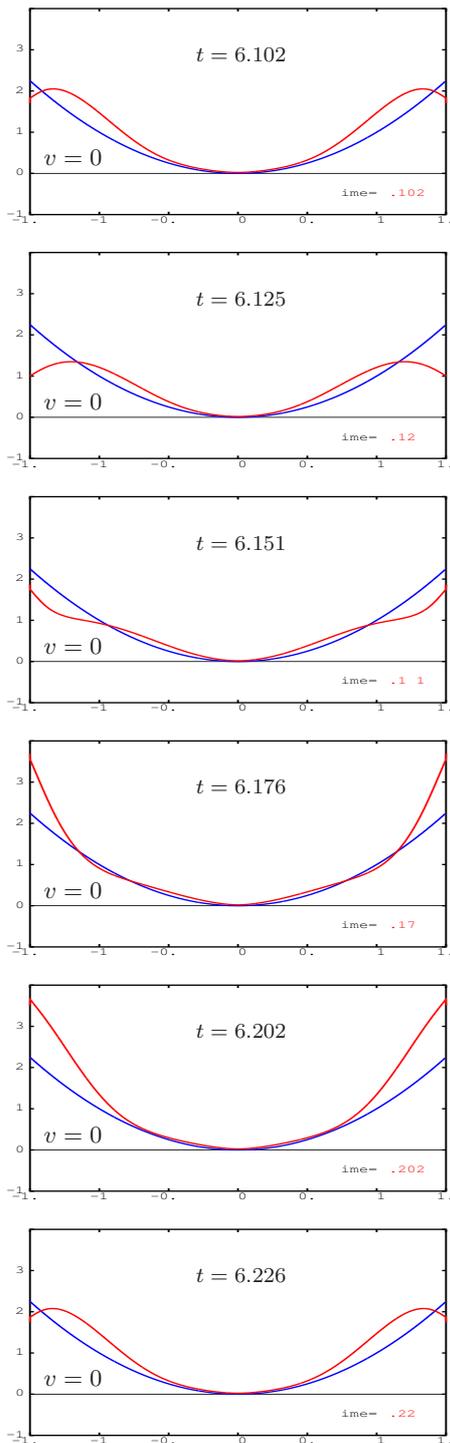


図5. 数値サポートの非分離現象, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ , 空間メッシュ幅  $h = \frac{1}{512}$ .

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計4件)

①友枝 謙二, “Numerical and Mathematical Approach to Support Splitting and Merging Phenomena in the Behaviour of Non-stationary Seepage”, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Volume 63 – 63rd Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics, 2014. (査読有), to appear

②友枝 謙二, “Numerical behaviour of support splitting and merging in nonlinear diffusion equations”, Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering Computational Technology, B.H.V. Topping, (Editor), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland, (2012), Paper 37, 12 pages. (査読有)

<http://www.ctresources.info/ccp/pdf.html?id=7177>

③友枝 謙二, “ある非線形拡散現象におけるサポートの分離・併合について”, 数理解析研究所講究録, 京都大学, **1810** (2012), 1–10. (査読無)

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1810-01.pdf>

④友枝 謙二, “Numerically repeated support splitting and merging phenomena in a porous media equation with strong absorption”, Journal of Math-for-Industry **3C** (2011), 61-68. (査読有)

[http://j-mi.org/contents\\_file/contents\\_files/loader/0/Article/233/file/default/JMI2011C-8.pdf](http://j-mi.org/contents_file/contents_files/loader/0/Article/233/file/default/JMI2011C-8.pdf)

[学会発表] (計11件)

① 友枝 謙二, “非定常浸透流におけるサポートの分離・併合現象に対する数値・数学的アプローチ”, 第63回理論応用力学講演会 (NCTAM2014), 日本学術会議主催, 2014年9月27日, 東京工業大学 (東京)

② 友枝 謙二, “Support splitting and non-splitting phenomena in the initial-boundary value problem for a porous media equation”, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 7 - 11, 2014, Madrid (Spain)

③ 友枝 謙二, “Repeated support splitting and merging phenomena in the initial-boundary value problem for a porous media equation”, Workshop on Scientific Computing, June 12-15, 2014, Department of Mathematics, FNSPE CTU in Prague, Decin (Czech Republic)

④ 友枝 謙二, “Numerical dynamics of support splitting and merging phenomena appearing in the flow through porous media”, The V Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, June 17-19, 2013, Santa Eulalia, Ibiza (Spain)

⑤ 友枝 謙二, “Numerical and mathematical approach to the behaviour of the interfaces in the flow through porous media”, ECCOMAS 2012 Congress: 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences

and Engineering, September 10-14, 2012, (Vienna) Austria

⑥ 友枝 謙二, “Numerical behaviour of support splitting and merging in nonlinear diffusion equations”,

ECT2012: The Eighth International Conference on Engineering Computational Technology, September 4-7, 2012, Dubrovnik (Croatia)

⑦ 友枝 謙二, “Numerical support dynamics appearing in the flow through an absorbing medium with non-linear filtration”,

8th Conference on Scientific Computation, July 20-23, 2012 Chengdu(成都) (China)

⑧ 友枝 謙二, “The dynamical behaviour of the support splitting and merging phenomena appearing in the flow through an absorbing medium”,

12. International Conference on Free Boundary Problems, Theory and Applications, June 11-15, 2012, Frauenchiemsee (Germany)

⑨ 友枝 謙二, “Numerical approach to the non-stationary seepage in the flow through an absorbing medium”,

5th International Conference on Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes March 5-9, 2012, Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics, Hanoi (Vietnam)

⑩ 友枝 謙二, “Numerical and mathematical approach to the non-stationary seepage in the flow through an absorbing medium”,

International Conference on: Numerical Analysis and Optimization - Theory and Applications December 17-21, 2011, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran (Saudi Arabia)

⑪ 友枝 謙二, “Support splitting phenomena in some nonlinear initial-boundary value problem”, Equadiff 2011(International Conference on Differential Equations), August 1 - 5, 2011, Loughborough University, Loughborough (UK)

[ 図書 ] (計 1 件)

① 友枝 謙二, “有限差分法”(執筆), 『応用数理解ハンドブック』朝倉書店 (日本応用数学会 監修, 薩摩順吉・大石進一・杉原正顯 編集), (2013), pp.460-463.(査読有)

[ 産業財産権 ]

なし

[ その他 ]

なし

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

友枝 謙二 (TOMOEDA, Kenji)

京都大学・情報学研究科・研究員

研究者番号 : 60033916

(2) 研究者分担者

なし

(3) 連携研究者

今井 仁司 (IMAI, Hitoshi)

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号 : 80203298

連携研究者

倉前 宏行 (KURAMA, Hiroyuki)

大阪工業大学・工学部・准教授

研究者番号 : 90298802

(4) 研究者協力者

なし