

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540181

研究課題名(和文) グラフ上微分方程式の解析

研究課題名(英文) Analysis of differential equations on graphs.

研究代表者

Trushin Igor (TRUSHIN, IGOR)

東北大学・国際教育院・准教授

研究者番号：80600337

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクトな部分を含む無限グラフ上の Schrodinger 作用素のポテンシャル再構成の問題に取り組む本研究では、ポテンシャル再構成をするため、Marchenko の基本方程式を導き出した。Marchenko の基本方程式は一意的に解けるので、ポテンシャルの一意性と安定性の証明ができ、散乱データの特性評価可能となった。作用素のスペクトル表現から得られる定常波動作用素が Moller の波動作用素に一致した。

研究成果の概要(英文)：In this project we consider Schrodinger operators on noncompact graphs which consist of some infinite rays and compact part attached. Spectral and scattering problems on graphs arise as simplified models in mathematics, physics, chemistry and engineering when one considers the propagation of waves of different natures in thin, tube-like domains. We study scattering direct and inverse problems which are important in applied physics. (1)We treat an inverse scattering problem on a graph with an infinite ray and a loop joined at one point. Reconstruction procedure is presented.(2)We consider Schrodinger operators on noncompact star-shaped graphs including some finite rays. We show that our spectral representation formula provides the time dependent formulation of the scattering theory. The scattering operator is constructed in the configuration space, and then is related to the scattering matrix in the momentum space. Corresponding inverse scattering problem is investigated.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 数学解析

キーワード：関数方程式 散乱理論

1. 研究開始当初の背景

本研究の対象は物理学の基礎方程式であり、グラフ上の Schrodinger 作用素の研究です。グラフに沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、現在ではナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などにも応用されているので、グラフ上の散乱逆問題に関してはその重要性です。Schrodinger 作用素を伴ったグラフは量子グラフと呼ばれるが、その数学的研究も盛んに進められ、グラフに沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、現在ではナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などにも応用されている。本研究はループを含む量子グラフと星型のグラフに対するポテンシャル散乱の逆問題を追究する、グラフ上微分方程式の研究である。散乱関数(散乱行列)は Heisenberg の定義に従い、定常的に定義されている。物理的により正当化できる散乱行列の時間に依存する定義は Moller によって与えられており、半直線上の Schrodinger 作用素の場合には両者が一致することが Faddeyev-Seckler によって示されている。逆散乱理論の目的はポテンシャルの一意性、再構成の方法、再構成の安定性、さらに散乱特性評価である。そこで、本研究では、ポテンシャル再構成をするため、Marchenko の基本方程式を導き出すものとする。

2. 研究の目的

コンパクトな部分を含む無限グラフ上の Schrodinger 作用素のポテンシャル再構成の問題に取り組む。Schrodinger 作用素を伴ったグラフは量子グラフと呼ばれるが、その数学的研究も盛んに進められ、グラフに沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、現在ではナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などにも応用されている。本研究はループを含む量子グラフと星型のグラフに対するポテンシャル散乱の逆問題を追究する、グラフ上微分方程式の研究である。散乱関数(散乱行列)は Heisenberg の定義に従い、定常的に定義されている。物理的により正当化できる散乱行列の時間に依存する定義は Moller によって与えられており、半直線上の Schrodinger 作用素の場合には両者が一致することが Faddeyev-Seckler によって示されている。逆散乱理論の目的はポテンシャルの一意性、再構成の方法、再構成の安定性、さらに散乱特性評価である。そこで、本研究では、ポテンシャル再構成をするため、Marchenko の基本方程式を導き出すものとする。Marchenko の基本方程式は一意に解けるので、ポテンシャルの一意性と安定性の証明ができ、散乱デー

タの特性評価可能となる。

3. 研究の方法

国内外の研究者達と研究交流を深め、資料や情報を積極的に入手する。

4. 研究成果

本研究はコンパクトな部分を含む無限グラフ上の Schrodinger 作用素の研究です。

3つの論文の内容:(1)については Marchenko の基礎方程式の一意可解性、(2)については作用素のスペクトル表現から得られる定常波動作用素が Moller の波動作用素に一致すること、また、スペクトル表現から散乱行列定まること、(3)については散乱行列が作用素のスペクトル表現から導かれ((2)の部分) そのために固有地の細かい分類が必要なことされるようになった。Schrodinger 作用素を伴ったグラフは量子グラフと呼ばれるが、その数学的研究も盛んに進められ、グラフに沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、現在ではナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などにも応用されている。本研究はループを含む量子グラフと星型のグラフに対するポテンシャル散乱の逆問題を追究する、グラフ上微分方程式の研究である。散乱関数(散乱行列)は Heisenberg の定義に従い、定常的に定義されている。物理的により正当化できる散乱行列の時間に依存する定義は Moller によって与えられており、半直線上の Schrodinger 作用素の場合には両者が一致することが Faddeyev-Seckler によって示されている。逆散乱理論の目的はポテンシャルの一意性、再構成の方法、再構成の安定性、さらに散乱特性評価である。そこで、本研究では、ポテンシャル再構成をするため、Marchenko の基本方程式を導き出すものとする。Marchenko の基本方程式は一意に解けるので、ポテンシャルの一意性と安定性の証明ができ、散乱データの特性評価可能となる。

論文(1)はコンパクトな部分を含む無限グラフ上の Schrodinger 作用素の研究で、ここではコンパクト部分が loop 状になった問題を考えた。固有値の特定、連続スペクトルに対応するスペクトル表現を定め、散乱関数からポテンシャルを同定する逆問題の一意性を証明した。グラフ上の量子力学は回路基板に沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、ナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などにも応用され、その重要性が増している。基本のグラフはいくつかの半直線が1点でつながる星型グラフであるが、それにいくつかの有限線分や loop などが加わったグラフが興味深い。現在、この問題の研究をすすめており、いくつかの論文を準備している

論文(2)-(3)では星型のグラフに対するポテンシャル散乱行列を元にしたポテンシャルの一意性と再構成の方法を考えた。

2011-2013度は以下研究を行った：

1 ループを含むグラフと星型のグラフに対するポテンシャル散乱行列を元にしたポテンシャルの一意性と再構成の方法。

2 星型のグラフ上 Schrodinger 作用素については逆散乱理論をもとにした非線形方程式。

3 星型のグラフとループを含む一般のグラフ上 Schrodinger 作用素の Resolvent と散乱行列の特性評価。

5. 主な論文発表等

[雑誌論文](計 3 件)

- (1) トルシン イゴール, 望月 清, A stationary approach to the scattering on noncompact graphs containing finite rays, Current Trends in Analysis and its Applications, 査読あり, 2014, in press
- (2) トルシン イゴール, 望月 清, Spectral problems and scattering on noncompact graphs containing finite rays, J.Inverse Ill-Posed Probl., 査読あり, 2014, in press
- (3) トルシン イゴール, 望月 清, On the scattering on a loop-shaped graph, in "Progress in Mathematics", 査読あり, Vol.301, 2012, 227-245, DOI: 10.1007/978-3-0348-0454-7_12

[学会発表](計 11 件)

1. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, Scattering on Graphs, 2013.11.20, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 東京理科大学
2. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, On inverse scattering on non-compact graphs, 2013.8.9, 9th International ISAAC Congress, Crakow, Poland
3. (招待講演) 望月 清, トルシン イゴール, Stationary approach to the time dependent scattering theory on star graphs, 2013. 3. 14, 信大関数解析研究会, 信州大学
4. (総合講演) 望月 清, トルシン イゴール, Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on noncompact star-shaped graphs, 2012.12.27, Taiwan-Japan

joint conference on PDE and analysis, Taipei, Taiwan

5. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, Scattering on graphs,, 2012.8.11, Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, Novosibirsk, Russia
6. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, On inverse scattering on graphs,, 2012.8.9, Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, Novosibirsk, Russia
7. (総合講演) 望月 清, トルシン イゴール, Spectral and scattering problems on noncompact star graphs including finite rays, 2012.3.9, 東海大発展方程式シンポジウム, 東海大学
8. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, On inverse scattering on graphs, 2011.11.23, 太閤山数理科学研究会、富山大学
9. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, Scattering problems on graphs, 2011.10.08, 仙台偏微分方程式研究会、東北大学
10. (総合講演) 望月 清, トルシン イゴール, 星型グラフ上の散乱問題, 2011.9.5, 夏の作用素論シンポジウム、熊本市国際交流会館
11. (招待講演) トルシン イゴール, 望月 清, On inverse scattering on graphs, 2011.8.24, 8th International ISAAC Congress, People" s Friendship Univ. Moscow, Russia

[その他]

[大学等のセミナー発表](計 1 件)

1. 望月 清, トルシン イゴール, Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on star graphs, 2011.10.12, 筑波大学解析セミナー

[研究会の主催](計 4 件)

1. 第9回青葉山勉強会「半古典近似：理論と数値計算」2013.4.19, 東北大学情報科学研究科 3 講演, 参加者 15 名
2. 第8回青葉山勉強会「数理物理と解析学」, 2013.3.25, 東北大学情報科学研究科 3 講演, 参加者 15 名
3. 第7回青葉山勉強会, 2013.2.7, 東北大学情報科学研究科 3 講演, 参加者 15 名
4. 仙台偏微分方程式研究会, 2011.10.8-10, 東北大学情報科学研究科 15 講演, 参加者 43 名

〔図書〕(計 0 件)

〔産業出願権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

トルシン イゴール (TRUSHIN, Igor)
東北大学・国際教育院・准教授
研究者番号：80600337

(2) 研究分担者

久保 英夫 (KUBO, Hideo)
北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・
教授
研究者番号：50283346

望月 清 (MOCHIZUKI, Hiyoshi)
首都大学東京・理工学研究科・名誉教授
研究者番号：80026773

(3) 連携研究者

なし