

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 12 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540188

研究課題名(和文) 不動点理論と凸解析学を介した非線形関数解析学と非線形問題の究明

研究課題名(英文) The Study of Nonlinear Functional Analysis and Nonlinear Problems Based on Fixed Point Theory and Convex Analysis

研究代表者

高橋 渉 (TAKAHASHI, Wataru)

慶應義塾大学・自然科学研究教育センター・訪問教授

研究者番号：40016142

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、これまでの研究でわき起こった重要で新たな非線形問題を、関数解析学を基礎にした非線形問題として捉え、その問題を、斬新でかつ統一的な不動点理論と凸解析学の立場から研究し、不動点の概念を拡張した吸引点を導入して、凸性を仮定しない吸引点の存在定理や、非線形平均収束定理を証明し、さらには連続性を仮定しない写像の半群の弱収束・強収束定理を証明するなど、新しい非線形関数解析学を構築するとともに、それを種々の非線形問題の解決に応用した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied nonlinear functional analysis and nonlinear problems by using fixed point theory and convex analysis. At first, we introduced the concept of attractive points of nonlinear mappings in Hilbert spaces and Banach spaces. Then we proved the existence of attractive points and nonlinear mean convergence theorems. Furthermore, we proved weak and strong convergence theorems for semigroups of not necessarily continuous mappings in Hilbert spaces and Banach spaces. Using these theorems, we solved nonlinear problems which are important in many areas of applied mathematics.

研究分野：非線形関数解析学とその応用

キーワード：非線形関数解析学 凸解析学 不動点理論 最適化理論 非線形作用素 均衡点問題 不動点アルゴリズム バナッハ空間

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 最適化や均衡問題などの非線形問題は、これまでの研究では、有限次元でかつ個別に研究されており、関数解析学を基礎にした非線形問題として捉え、不動点理論や凸解析学を介して、統一的にかつヒルベルト空間やバナッハ空間などの無限次元で研究されているものが少なかった。

(2) 微分方程式などで重要な非線形発展方程式問題や、その応用としての最適化理論の研究では、非拡大写像を基礎にした研究が多かった。しかしながら、極大単調作用素のリゾルベントは、ヒルベルト空間では非拡大写像になるが、バナッハ空間では非拡大写像にならない。そこで、極大単調作用素のリゾルベントがもつ非拡大写像ではない非線形作用素の研究が必要であった。

### 2. 研究の目的

これまでの研究でわき起こった新たな非線形問題、特に非線形最適化や均衡問題の分野で発生した重要な非線形問題を、関数解析学を基礎にした非線形問題として捉え、その問題を不動点理論と凸解析学を介して研究し、これまでの理論よりも優れた非線形関数解析学のいくつかの理論を構築するとともに、非線形最適化や均衡問題の非線形問題の解明にあたることを目的とした。

### 3. 研究の方法

(1)平成 19 年度から 22 年度にかけて行なわれた『最適化理論と不動点理論を介した非線形関数解析学と凸解析学の究明、及びその応用』(基盤研究(C))で、新たに問題になり、かつ重要と思われる非線形最適化や均衡問題、微分方程式等の非線形問題、及び現在でも数学、物理学、工学、オペレーションズ・リサーチ、理論経済学における重要な非線形問題を的確に把握し、数学(非線形解析学)的に再構成してみるとともに、問題点を洗い出す。また、非線形問題に関する参考文献等も参考にし、現状と問題点を明確にする。

(2) 非線形最適化や均衡問題を非線形解析学的に定式化してみ、研究すべき非線形作用素(集合値であるかもしれない)と、これまでの結果を記述してみる。特に、ヒルベルト空間の非線形最適化や均衡問題では、極大単調作用素に関するリゾルベントの性質が重要であるので、これまでの結果を整理するとともに、新しい性質をも研究してみる。

(3) ヒルベルト空間で非線形最適化や均衡問題の存在定理を種々の形で研究するとともに、解の近似法を弱収束、強収束の形で研究する。

(4) バナッハ空間での逆問題を、連続線形写像と 4 つの非線形射影、4 つのリゾルベント、バナッハ空間の双対写像を使って定式化してみる。バナッハ空間では距離射影

を含む 4 つの非線形射影、距離リゾルベントを含む 4 つのリゾルベントが存在するのでその組み合わせが複雑となる。

(5) (4)の定式化では、4 つの非線形射影、リゾルベントの性質が重要となる。そこでこれまでに得られた結果に加えて、新しい結果が必要になる。バナッハ空間の  $m$ -増大作用素から増大リゾルベント定義されるし、バナッハ空間の極大単調作用素からは、3 つのリゾルベントが定義できる。古くから知られてリゾルベント(距離リゾルベント)と、相対リゾルベント、擬非拡大リゾルベントである。4 つリゾルベントは特別な場合として、4 つの非線形射影となるし、それらの拡張は、よく知られている非拡大写像や新しい非線形写像になる。そこでそれぞれの写像をバナッハ空間のノルムの凸性、微分可能性などのバナッハ空間の幾何学的性質との関連で研究を行う。

(6) バナッハ空間の極大単調作用素からは、3 つのリゾルベントが定義できることを上記で述べたが、3 つのリゾルベントの不動点は、極大単調作用素の零点と同値であるから、極大単調作用素の零点問題はそれら 3 つのリゾルベントの不動点問題となる。3 つのリゾルベントからは、それぞれ、距離写像、ノンスプレッド写像、スキュー-ノンスプレッド写像が定義される。既に研究代表者の研究によってノンスプレッド写像、スキュー-ノンスプレッド写像の不動点定理が知られているが、極大単調作用素の零点を求める 3 つの写像による収束定理などは得られていない。3 つの写像の弱、強収束問題を研究するとともに、これらの写像はバナッハ空間の相対写像と密接な関係があるので、相対写像との関連も研究する。

(7) 逆問題の特別な問題として、像再生や実行可能生の問題を研究する。像再生や実行可能生の問題では、これまで距離射影だけを使ってその研究がなされていたが、距離射影を使っての像再生や実行可能生の問題、他の 3 つの非線形射影を使って像再生や実行可能生の問題をも解明する。バナッハ空間で、距離射影以外の 3 つの非線形射影を使って、これらの問題を研究することには多くの意義がある。有限次元空間の場合でもユークリッドのノルム以外で像再生や実行可能生の問題を取り扱うことが出来るからである。現実に応用されている像再生や実行可能生の問題と関連させながら、バナッハ空間での像再生や実行可能生の問題を研究する。

(8) 川崎-高橋はヒルベルト空間で係数を変えると非拡大写像にもなり、ノンスプレッド写像にもなるような応用性の高い写像を定義し、その不動点定理を証明した。さらにある条件を持った係数のときは一意の不動点をもつという、ベクトル空間では最初の一意の不動点定理を証明した。非線形最適化や均衡問題、微分方程式の分野で発

生する非線形問題では、解の一意性問題は重要であるので、川崎-高橋の不動点定理を基に、種々の非線形写像の一意的不動点定理を研究するとともに、その一意の不動点定理を用いて、非線形最適化や均衡問題の研究を行う。

#### 4. 研究成果

(1) 不動点にかわるアトラクティブポイントの概念をヒルベルト空間で導入し、凸性を仮定しないで、平均収束定理を証明することに成功した。これは、これまでよく知られていたバイロンのエルゴード定理を大幅に拡張するものである。さらに、この定理をバナッハ空間の平均収束定理にまで拡張することにも成功している。

(2)  $m$ -増大作用素と極大単調作用素から、4つの非線形作用素を見つけ出し、そのうち3つの作用素の不動点定理を証明することに成功した。また、その不動点を見つける近似法に対して非拡大写像や擬非拡大作用素の不動点を求める強収束定理や弱収束定理を得た。

(3) 逆問題の解を求める方法として、ハイブリッド法、特にシュリンキング射影法といわれるハイブリッド法による強収束定理をバナッハ空間で証明することに成功した。

(4) 像再生や実行可能性問題に関する近似法の研究では、共通不動点を求める近似法を研究し、新しいハイブリッド法による強収束定理を得た。さらに、ここで得られた実行可能性問題の解決法を使って、擬非拡大作用素に関する弱収束定理をも得た。またこれらを非線形最適化問題に応用し、近接点法に関する新しい結果を得た。

(5) 連続性を仮定しない写像の半群を定義し、その半群に対する不動点定理や平均収束定理を証明することに成功した。このことによって、微分方程式における非線形発展方程式の問題は、半群に非拡大写像を仮定しないで研究できるようになった。

(6) 必ずしも線形を仮定しない半線形半群のエルゴード定理を証明することに成功した。また、その極限は、4つの非線形射影の一つを使って特徴化できるという結果も得た。

(7) ヒルベルト空間で、非拡大写像を含む幅広い写像を定義し、その写像の不動点定理を証明するとともに、弱収束、強収束定理を証明した。これらを用いて、30年もの間未解決とされていたブラウダーの陰的収束定理を拡張することに成功した。

(8) ベクトル空間で、川崎-高橋の定理より精巧な一意の不動点定理を証明した。この定理の証明では、三角不等式がつかえないので、巧妙な証明の手法が要求された。この一意の不動点定理により、これまで、バナッハの縮小写像の不動点定理からしか得られていなかった一意の解の非線形問題が、幅広く研究できることとなった。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計63件)

W. Takahashi, N.C. Wong, J.C. Yao, Nonlinear ergodic theorem for commutative families of positively homogeneous nonexpansive mappings in Banach spaces and applications, *J. Convex Anal.*, 査読有, 21, 2014, 535-552.

W. Takahashi, The split feasibility problem in Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 査読有, 15, 2014, 1349-1355.

W. Takahashi, Unique fixed point theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 査読有, 15, 2014, 831-849.

W. Takahashi, N.C. Wong, J.C. Yao, Nonlinear ergodic theorem for positively homogeneous nonexpansive mappings in Banach spaces, *Numerical Funct. Anal. Optim.*, 査読有, 35, 2014, 85-98.

L.J. Lin, W. Takahashi, Attractive point theorems for generalized nonspreading mappings in Banach spaces, *J. Convex Anal.*, 査読有, 20, 2013, 265-284.

W. Takahashi, Strong convergence theorems for maximal and inverse-strongly monotone mappings in Hilbert spaces and applications, *J. Optim. Theory Appl.*, 査読有, 157, 2013, 781-802.

C.S. Chuang, L.J. Lin, W. Takahashi, Halpern's type iterations with perturbations in Hilbert spaces, *J. Global Optim.*, 査読有, 56, 2013, 1591-1601.

W. Takahashi, N.C. Wong, J.C. Yao, Fixed point theorems for general contractive mappings with  $w$ -distances in metric spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 査読有, 14, 2013, 637-648.

L.J. Lin, W. Takahashi, A general iterative method for variational inequality problems in Hilbert spaces and applications, *Positivity*, 査読有, 16, 2012, 429-453.

W. Takahashi, J.C. Yao, Strong convergence theorems by hybrid methods for countable families of nonlinear operators in Banach spaces, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 査読有, 11, 2012, 333-353.

T. Kawasaki, W. Takahashi, Fixed point and nonlinear ergodic theorems for new nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 査読有, 13, 2012, 529-540.

S. Akashi, W. Takahashi, Strong convergence theorems for nonexpansive mappings on star-shaped sets in Hilbert spaces, *Applied. Mathematics and*

Computation, 査読有, 219, 2012, 2035-2040.

W. Takahashi, Y. Takeuchi, Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, 12, 2011, 399-406.

T. Honda, W. Takahashi, Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces, Taiwanese J. Math., 査読有, 15, 2011, 2169-2193.

K. Nakajo, K. Shimoji, W. Takahashi, Approximations for nonlinear mappings by the hybrid method in Hilbert spaces, Nonlinear Anal., 査読有, 74, 2011, 7025-7032.

M. Hojo, W. Takahashi, J.-C. Yao, Weak and strong convergence theorems for super hybrid mappings in Hilbert spaces, Fixed Point Theory, 査読有, 12, 2011, 113-126.

[学会発表](計23件)

W. Takahashi, Iterative Methods for Generalized Split Feasibility Problems in Nonlinear Analysis, The Fourth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, from August 5 to 9, 2014, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Iterative Methods for Common Null Point Problems in Hilbert Spaces, The 8th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization, Naresuan University, Phitsanulok, Thailand, from July 28 to 30, 2014, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Attractive Point and Mean Convergence Theorems for Semigroups of Mappings without Continuity, International Conference of Nonlinear Analysis and Optimization, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, from December 20 to 22, 2013, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Fixed point and convergence theorems for semigroups of not necessarily continuous mappings, The 8-th International Conference of Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA 2013), Hirosaki University, Hirosaki, Japan, from August 2 to 6, 2013, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Nonlinear Analytic Methods for Linear Operators and Applications, The Third Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Shimane Prefectural Convention Center, Matsue, Japan, from September 2 to 6, 2012, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Fixed Point and Attractive Point Theorems for New

Nonlinear Mappings, The 6-th International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Uttaradit Rajabhat University, Uttaradit, Thailand, from July 31 to August 1, 2012, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Fixed Point Theorems and Nonlinear Ergodic Theorems for Generalized Hybrid Mappings in Hilbert Spaces, The 1st International Conference of Graduate Students with Sisterhood University, National Changhua University, Changhua, Taiwan, from October 15 to 16, 2011, Plenary Speaker.

W. Takahashi, Classes of New Nonlinear Mappings and Fixed Point and Convergence Theorems, The 7-th International Conference of Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA 2011), Pukyong National University, Busan, Korea, from August 2 to 5, 2011, Plenary Speaker.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高橋 渉 (TAKAHASHI, Wataru)  
慶應義塾大学・  
自然科学研究教育センター・訪問教授  
研究者番号：40016142

### (2) 研究分担者

谷口雅治 (TANIGUCHI, Masaharu)  
岡山大学・自然科学研究科・教授  
研究者番号：30260623

木村泰紀 (KIMURA, Yasunori)  
東邦大学・理学部・准教授  
研究者番号：20313447

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：