

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540201

研究課題名(和文) 電磁場内での多体量子力学系に対するスペクトル・散乱理論

研究課題名(英文) Spectral and scattering theory for many body quantum systems in electromagnetic fields

研究代表者

足立 匡義 (ADACHI, TADAYOSHI)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30281158

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：我々の研究成果は次の三つに大別される：1．空間的に一様かつ時間周期的な電磁場内にある量子力学系に対する漸近完全性に関して、これまでに取り扱われていなかった場合の問題をいくつか解決した。2．時間に関してゼロに漸近する一様電場内での逆散乱問題に関して、新たな工夫によりこれまでの結果を改良した。3．非線形発展方程式の解の漸近挙動に関して、特に自己相似解を持つ方程式系に対し新たな結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The achievements of our research are as follows: 1. We showed the asymptotic completeness for some quantum systems in time-periodic homogeneous electric and magnetic fields. 2. We improved some results obtained by previous works on a certain problem of the inverse scattering for quantum systems in homogeneous electric fields asymptotically zero in time. 3. We obtained new results on the asymptotic behavior of the solutions to nonlinear evolution equations, especially which possess self-similar solutions.

研究分野：数理物理学

キーワード：多体問題 スペクトル理論 散乱理論 漸近完全性 電磁場 漸近挙動 自己相似解

1. 研究開始当初の背景

多体量子力学系に対する漸近完全性の問題は、量子散乱理論における中心的な問題の一つで、その解決は 1960 年代からの懸案である。漸近完全性とは、系の散乱状態の時間発展が、散乱のチャンネルを表現する状態の時間発展の重ね合わせとして漸近的に記述される、という物理学の理論的基礎をなす性質である。しかし、それを数学的に厳密に証明する際に克服すべき困難は大きかった。以下、敬称を略して述べるが、1960 年代の Faddeev による三体問題に対する仕事に始まり、1980 年代前半の Enss、そして 1987 年の Sigal と Soffer とによる仕事を契機に研究は大きく進展し、Graf、北田、田村、Yafaev 等による短距離型散乱理論の改良・整備、更には 1993 年の Dereziński による仕事に至り、ようやく一般の多体量子力学系に対する漸近完全性が、クーロンポテンシャルを含む長距離型ポテンシャルに対して示された。

ここまででは、外力場のない場合に限った話であった。一方、外力場として時間的に不変な電磁場が存在する場合には、1990 年代から次のような研究がなされた。

- (1) 一様電場のみある場合  
足立・田村 (1995-1996)  
Herbst-Møller-Skibsted (1995-1996)
- (2) 一様磁場のみある場合  
Gérard-Laba (1994-1996)  
足立 (2001-2002)
- (3) 一様電場、磁場が共存する場合  
Skibsted (1997)

これらの研究により、(1)の場合は望ましい形で解決され、また(3)の場合は(2)の場合に帰着されることが示され、(2)の場合の解決が重要であることがわかった。(2)の場合には未解決問題が多く存在し、それらを解決するのが懸案の一つであり、後述の 2. (1)で取り上げる。

前述の外力場は、時間的に不変な電磁場であった。もう一つの焦点は時間周期的に変動する電磁場内での多体散乱問題にある。まず、時間周期的な変動をする一様電場内での二体散乱問題に対する主な研究を見ておく。

- (4) 電場の時間平均が 0 の場合  
谷島 (1977; 短距離型)  
Howland (1979; 短距離型)  
北田-谷島 (1982; 長距離型)
- (5) 電場の時間平均が 0 でない場合  
Møller (2000; 短距離型)  
足立 (2007; 長距離型)  
足立-木村-清水 (2010; 長距離型)

これらは望ましい形で解決されたが、多体問題になると状況は一変する。

- (6) 電場の時間平均が 0 の場合  
Korotyaev (1985; 短距離型)  
中村 (1986; 短距離型)
- (7) 電場の時間平均が 0 でない場合  
足立 (2001; 短距離型)  
足立 (2007; 長距離型)

(7)では一般の多体系に対して望ましい形で解決されたが、(6)では Faddeev 理論により三体問題のみ扱われた。ここに時間的に不変な電磁場の場合との大きな差異がある。これについては、後述の 2. (2)で取り上げる。

2. 研究の目的

我々の研究目的は、外力場の働く空間内での、多体量子力学系に対する散乱理論を構築することにある。これから重点的に研究すべきなのは、一つには定磁場が働いている場合、もう一つには AC Stark 効果に代表される、時間周期的な変動をする一様電場が働いている場合である。現状ではどちらの場合でも、一般の多体量子力学系に対しては、漸近完全性の問題が部分的にしか解決されていない。系を支配する Hamiltonian のスペクトル構造などで両者には似通っている部分があることに着目し、これらの数理を探求することで、この基本的かつ重要な問題に対する解決策を見出したい。

(1) 定磁場内での多体量子力学系に対する散乱理論

定磁場内にある、部分系の全電荷が 0 であるような場合も含めた極めて一般的な多体量子力学系を考え、その系に対する漸近完全性の問題を解決するのが目的である。

前述の 1. (2)で挙げた Gérard-Laba の研究では系の全粒子が荷電していることが要求され、中性子のような非荷電粒子は扱われず、原子核は研究対象外である。更に、部分系の全電荷は全て 0 でない、という強い仮定の下では一般の多体系に対する問題の解決はなされたが、イオン化していない原子のような非荷電部分系が混在する系に対する漸近完全性の問題は三体系を除いて手付かずであった。その後、前述の 1. (2)で挙げた足立による研究で、荷電粒子がただ一つで、残りが非荷電粒子で構成されているような特別な系に対してであるが、非荷電粒子が混在する系に対する漸近完全性の成立が示された。

物理的描像では、荷電部分系の場合、磁場の影響でそれに直交する方向には有界に留まるが、非荷電部分系の場合、磁場に直交する方向の運動も磁場の影響を受けない、という大きな差異がある。上記の特別な系を除いて、この差異を取り扱う手法は開発されていなかったが、足立 (2007) により、荷電粒子が二個ある三体系で、荷電粒子のなす部分系が荷電している場合に、Mourre 評価を得る手法が開発された。そのアイデアを手掛かりに、荷電粒子の個数を一般のものにした場合、更には、部分系の全電荷が 0 であるような場合も含めた一般的な多体量子力学系を、時間的に不変な一様磁場の中で考え、その系に対する漸近完全性の問題を解決する。これは、Gérard-Laba との成書 (2002) においても未解決問題として取り上げられている。

磁場に直交する方向の運動に関して、荷電部分系、非荷電部分系それぞれに特有な性質を数学的に如何に捉えるかが大きな課題で

あり、その克服は数学だけでなく物理学においても極めて重要であると考えられる。

### (2) AC Stark 効果を持つ多体量子力学系に対する散乱理論

AC Stark 効果を持つ多体量子力学系に対する漸近完全性の問題を解決するのが目的である。

これまでの研究の概観で見たように、時間周期的に変動する電場に関しては、その時間平均が 0 であるかそうでないかで、状況が大きく異なる。この差異を生んでいる原因の一つに挙げられるのが、平均が 0 である場合、多体系に対して Floquet Hamiltonian に対する Mourre 評価が得られていない点である：周期  $T$  で変動する一様電場  $E(t)$  を持つ Hamiltonian  $H(t)=p^2/2 \cdot E(t) \cdot x+V(x)$  を考える。 $E$  を  $E(t)$  の時間平均とする。このとき、 $E(t)-E$  の影響を打ち消すように座標系を加速すれば、 $H^m(t)=p^2/2 \cdot E \cdot x+V(x+c(t))$  のような形の Hamiltonian が系を支配することになる。但し、 $c(t)$  も時間周期的で、周期  $T$  を持つ。 $H(t)$ 、 $H^m(t)$  が生成する時間発展作用素を  $U(t,s)$ 、 $U^m(t,s)$  とすると、あるユニタリ作用素族  $\mathcal{A}(t)$  を用いて  $U(t,s)=\mathcal{A}(t)U^m(t,s)\mathcal{A}(s)^*$  と表すことができる (Avron-Herbst の公式)。これにより、問題は  $U^m(t,s)$  に対するものに帰着される。 $U^m(t,s)$  に対する散乱理論を構築する上で大きな障害となるのは、エネルギー保存則の破れである。 $H^m(t)$  に付随する Floquet Hamiltonian  $K$  を導入するとその難点が解消されることはよく知られている。この  $K$  に対する散乱理論を構築して、 $U^m(t,s)$  の漸近挙動を調べるのが、Howland-谷島の方法の処方箋であり、主に二体短距離型散乱理論で威力を発揮してきた。そして、 $K$  に対する散乱理論を構築する上で重要な役割を果たすと思われるのが  $K$  に対する Mourre 評価である。Sigal-Soffer によって正交換子法が考案されてからは、多体量子力学系の散乱理論においては必須とも言うべきものになっている。

さて、今の場合、 $E$  が 0 でなければ、二体系であっても多体系であっても、 $K$  に対する conjugate operator  $A$  として、定電場の場合と同じく  $A=E \cdot p$  をとれば良いことが知られている。問題は  $E$  が 0 の場合である。二体系の場合には横山 (1998) によって、伸長作用素群の生成作用素に  $(p^2+1)^{-1}$  を掛けて得られる作用素を  $A$  ととれば良いことが示された。一方、多体系の場合には、その定義にある  $(p^2+1)^{-1}$  が障害となって、conjugate operator を見つけられずにいるのが現状である。そこで、多体系に対しても  $K$  に対する Mourre 評価が得られるように理論を構築し直し、漸近完全性の問題を解決する。因みに、Møller-Skibsted (2004) では、Mourre 理論を拡張することで極限吸収原理の獲得に成功したが、minimal velocity estimate に相当するものは未だ得られていない。それが研究の進展を滞らせているものと我々は考えている。

### 3. 研究の方法

定磁場内での多体量子力学系に対する散乱理論においては、非荷電部分系が存在する場合の多くで漸近完全性の問題が未解決であるので、それらの中でも比較的取り扱いやすいと思われる場合から順に考えて、最終的に一般の場合まで取り扱えるように理論を構築していく。また、AC Stark 効果を持つ  $N$  体量子力学系に対しては、Floquet Hamiltonian に対するスペクトル・散乱理論が未だ発展途上であるので、少なくとも漸近完全性の問題を解決できる程度にまでは理論を進展させる。

#### (1) AC Stark 効果を持つ多体量子力学系に対する漸近完全性の研究

AC Stark 効果を持つ  $N$  体量子力学系に対する散乱問題は、Avron-Herbst の公式により、時間周期的な相互作用ポテンシャルを持つ  $N$  体 Schrödinger 作用素に対する散乱問題に帰着される。そこで、後者を解決するための理論を構築する。

外力場が時間的に不変である場合、状態の時間発展に沿っての、粒子の位置・運動量の関係を表す伝播評価を導出することが鍵となり、それには Mourre 評価が非常に重要な役割を果たしてきた。一方、外力場が時間的に変動する場合、対象となる Hamiltonian は時間に依存している。その Mourre 評価は各時刻で得られるが、エネルギー保存則が破れているため、エネルギーの有界性が保証されている場合を除けば、一般にそれは有効ではない。そこで、主に次の二つの方針に沿って考察していく。

##### Howland-谷島の方法による解析

Floquet Hamiltonian  $K$  を導入し、それに対する Mourre 評価を導出して問題を解決する。二体系に対しては横山 (1998) による結果があるが、現時点では三体系に対してさえも、未だに Mourre 評価の導出には成功していない。Møller-Skibsted (2004) で得られた極限吸収原理から得られる伝播評価だけでは多体問題を扱うにはかなり不足しているようである。特に、外電磁場がない場合に証明の鍵となっていた minimal velocity estimate に相当するものの導出は、通常の Mourre 評価からなされるものと思われる。 $K$  に対する新たな conjugate operator の提唱が望まれる。

##### 物理的発展作用素に対する伝播評価の導出

物理的により自然な発想に従い、時間に依存する Hamiltonian  $H^m(t)$  が生成する発展作用素  $U^m(t,s)$  に対する伝播評価を、直接導出する方法を考案し、それを用いて解析する。足立 (2007) により、電場の時間平均が 0 でない場合には、その導出がなされ、長距離型散乱問題においても漸近完全性が成立することが示されている。それと類似の議論が成立することが望まれる。

他の打開策としては、二体問題と多体問題の中間に位置する電荷輸送モデルに対する

散乱理論を構築してから、標記の問題を解決するというものがある。

#### (2) 定磁場内での多体量子散乱の研究

未解決である場合の中では最も単純であると思われるものに、

荷電・非荷電粒子混在系で、荷電粒子の個数は2以上(荷電粒子からなる部分系の全電荷は全て0でない)

がある。系を支配する Hamiltonian と全擬運動量に関する情報のみを用いて、荷電粒子が形成する荷電部分系の内部構造を把握することができれば、荷電粒子が1個の場合と同様に解析が進むものと期待される。現段階では系を支配する Hamiltonian のスペクトルの性質もわかっていないので、そのスペクトル理論を構築するのが先決である。足立(2007)により、荷電粒子2個、非荷電粒子1個の三体系に対して conjugate operator が構成され、Mourre 評価が得られている。そのアイデアが1の場合にも拡張されることが望まれる。

その次に取り扱うべきなのは、

部分系の中にその全電荷が0となるものがある場合(三体系)

である。Gérard、Laba 両氏は、例えば+1, +1, -1 の電荷を持つ三体系に限定して漸近完全性の問題を研究した。実際にはもう一つ、例えば+1, -1, 0 の電荷を持つ三体系の場合を取り扱ってはじめて、三体系に対する全ての場合が尽くされたことになる。

そして、最終目標は一般の場合

を取り扱うことである。3個以上の荷電粒子で形成される非荷電部分系の運動を如何に把握するかが克服すべき課題となる。

上記の、に対する研究遂行のための工夫について述べる。定磁場の特性により、空間次元が2の場合には、空間次元が3の場合と比べて、想定すべき散乱チャンネルが少なくなることが物理的描像から予想される。空間次元が3ならば、磁場に平行な方向にも散乱し得るからである。この物理的描像に基づけば、空間次元が2の場合の方が扱いやすいと考えられるので、最初に空間次元が2の場合の問題を解決した後で、空間次元が3の場合の問題に取り組む。また、回転する物体の周りの粘性流体モデルにも数理的に通じるものがあるので、流体を主な研究対象としている前川氏(研究分担者)と議論し、双方の分野での研究の進展を図る。

#### 4. 研究成果

##### (1) 空間的に一様な電磁場内での量子散乱

研究代表者である足立は、その学生である川本昌紀氏と共同で、定磁場に直交する2次元平面内を運動する1つの荷電粒子からなる量子力学系を考え、その平面内に空間的に一様な電場を印加したときの粒子の挙動を記述する発展作用素の簡明な表現を与えた。それは、定磁場がない場合に Avron-Herbst の公式として知られているものに対応してお

り、定磁場も存在する場合へその公式を拡張したことになる。Avron-Herbst の公式で使われている平行移動作用素を、定磁場の影響を考慮した magnetic translation に置き換えたことがその導出のための工夫である。また、この系では、定磁場だけが存在する場合には、荷電粒子はその影響で束縛されるが、適当な一様電場が印加されると、ドリフト現象が起こることが知られている。例えば、一様電場の大きさが時間に関して一定である場合、定電場、あるいはサイクロトロン振動数で回転する電場が印加されると、荷電粒子は時間が経つにつれて原点から遠ざかっていく。そのことを、前述の Avron-Herbst 型の公式から証明し、さらに中心力ポテンシャルによる摂動を考えて、波動作用素の存在と漸近完全性に関する研究を行った。これまでは、定電場が印加されている場合であっても、漸近完全性の証明はなされていなかった。漸近完全性の結果を得るには、中心力ポテンシャルを短距離型に制限したり、サイクロトロン振動数で回転する電場が印加された場合には、さらに中心力ポテンシャルが球対称であるという制約は付くが、漸近完全性の証明が得られたことは有意義であると思われる。この結果は学術論文<sup>4</sup>で発表されている。

##### (2) 時間に関して0に漸近する一様電場内での量子逆散乱

研究代表者である足立は、その学生である石田敦英氏と藤原祐子氏と共同で、時間が経つにつれ0に漸近するような、空間的に一様な電場内での量子散乱逆問題に取り組み、足立・鎌田・数野・虎谷(2011)で得られた結果の改良を行った。具体的には、散乱作用素からポテンシャルを再構成するための公式に現れる積分の評価の改良を行い、これまでよりも広いクラスに属するポテンシャルに対して、散乱作用素からポテンシャルが一意に定まることを示した。この手法は、時間周期的な変動をする一様電場で、その時間平均が0でないものに対しても有効で、Nicoleau 氏の論文(2005)、藤原氏の修士論文(2010)に現れる結果をも改良している。また、その特殊な場合である定電場の場合にも適用でき、Weder 氏の論文(1996)、Nicoleau 氏の論文(2003)、足立・前原(2007)に現れる結果をも改良している。この結果は学術論文<sup>1</sup>において発表されている。

##### (3) 時間周期的に変動する、空間的に一様な磁場内での量子散乱

研究代表者である足立は、その学生である川本昌紀氏と共同で、時間周期的にオン・オフを繰り返すような一様磁場内での量子散乱の順問題に取り組み、磁場による加速によって荷電粒子が対数螺旋のような軌道に沿って遠方へ飛び去る場合に、系を支配する時間周期的 Hamiltonian に付随する Floquet Hamiltonian に対して極限吸収原理を得た。これより、Floquet Hamiltonian から構成される波動作用素の漸近完全性が得られる。ま

た、時間周期的 Hamiltonian が生成する物理的な時間発展作用素から構成される波動作用素の存在を示し、Howland-谷島の手法を用いて、物理的な時間発展作用素から構成される波動作用素の漸近完全性を示した。この成果については、既に論文を書き上げ、現在学術雑誌に投稿しているところである。

#### (4) 非線形発展方程式の解の漸近挙動

研究分担者である前川は、学術論文<sup>6</sup>ではスケーリングと平行移動に関する不変性を持つ非線形発展方程式を、学術論文<sup>3</sup>では自己相似解を持つ Keller-Segel 系を取り扱い、解の漸近挙動を調べた。学術論文<sup>5</sup>では軸対称 Burgers 渦の、高 Reynolds 数における安定性を調べた。また学術論文<sup>2</sup>では非同所拡散方程式の基本解に対する各点評価を得た。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 8 件)

<sup>1</sup> T. Adachi, Y. Fujiwara and A. Ishida, On multidimensional inverse scattering in time-dependent electric fields, *Inverse Problems* **29** (2013), 085012 (24pp). 査読有

<sup>2</sup> Y. Maekawa and H. Miura, Upper bounds for fundamental solutions to non-local diffusion equations with divergence free drift, *Journal of Functional Analysis* **264** (2013), 2245-2268. 査読有

<sup>3</sup> Y. Kagei and Y. Maekawa, On asymptotic behaviors of solutions to parabolic systems modelling chemotaxis, *Journal of Differential Equations* **253** (2012), 2951-2992. 査読有

<sup>4</sup> T. Adachi and M. Kawamoto, Avron-Herbst type formula in crossed constant magnetic and time-dependent electric fields, *Letters in Mathematical Physics* **102** (2012), 65-90. 査読有

<sup>5</sup> Y. Maekawa, Spectral properties of the linearization at the Burgers vortex in the high rotation limit, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* **13** (2011), 515-532. 査読有

<sup>6</sup> Y. Kagei and Y. Maekawa, Asymptotic behaviors of solutions to evolution equations in the presence of translation and scaling invariance, *Journal of Functional Analysis* **260** (2011), 3036-3096. 査読有

<sup>7</sup> T. Adachi, and A. Ishida, Scattering in an external electric field asymptotically constant in time, *Journal of Mathematical Physics* **52** (2011), 062101 (15pp). 査読有

<sup>8</sup> T. Adachi, T. Kamada, M. Kazuno and K. Toratani, On multidimensional inverse scattering in an external electric field

asymptotically zero in time, *Inverse Problems* **27** (2011), 065006 (17pp). 査読有

〔学会発表〕(計 1 件)

<sup>1</sup> 前川泰則, 2次元半空間における渦度方程式の数学解析, 日本数学会函数方程式論分科会特別講演, 2012年3月29日, 東京理科大学.

〔図書〕(計 1 件)

<sup>1</sup> *Mathematical analysis on the Navier-Stokes equations and related topics, past and future -In memory of Professor Tetsuro Miyakawa-*, Edited by T. Adachi, Y. Giga, T. Hishida, Y. Kagei, H. Kozono and T. Ogawa, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, 35. Gakkōtoshō Co., Ltd., Tokyo, 2011. iv+241 pp.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~adachi/>

### 6. 研究組織

#### (1) 研究代表者

足立 匡義 (ADACHI, Tadayoshi)  
神戸大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 30281158

#### (2) 研究分担者

前川 泰則 (MAEKAWA, Yasunori)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 70507954

#### (3) 連携研究者

なし