

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 14 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540221

研究課題名(和文) タイヒミュラー空間のコンパクト化の多面的研究

研究課題名(英文) Studies on compactifications of Teichmüller spaces

研究代表者

小森 洋平 (Komori, Yohei)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：70264794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン球面から1つ以上の円板と2点以下の点を除いた場合を除き、すべての位相的有限なリーマン面についてタイヒミュラー空間の次元プラス1個の単純閉測地線をつましく選んで、長さ関数によりタイヒミュラー空間を有限次元実射影空間内の多面体の内部領域として実現できることを構成的に示した。またタイヒミュラー空間のサー斯顿境界の実現についても考察した。さらにトーラス上のリーマン面の退化族を具体的に構成し、その特異ファイバーと正則切断を決定した。

研究成果の概要(英文)：Except Riemann surfaces conformal to Riemann spheres minus disks and one or two points, I showed that Teichmüller spaces of Riemann surfaces of topologically finite types can be realized as a polyhedron in finite dimensional real projective spaces by means of length functions of suitable choices of simple closed geodesics. Thurston boundaries of Teichmüller spaces were also considered. I also constructed degenerate families of Riemann surfaces over tori explicitly, and determined their singular fibers and holomorphic sections.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析 リーマン面

1. 研究開始当初の背景

リーマン面の变形空間であるタイヒミュラー空間は、個々のリーマン面の性質を表すというより、リーマン面の族としての振る舞いを記述している空間である。特にリーマン面があるパラメータについて動く(变形する)際に变化する性質や量は、タイヒミュラー空間の言葉で記述できる。リーマン面の退化の様子をタイヒミュラー空間の境界で捉えようとする試みはその典型例である。

リーマン面を1次元複素多様体とすることにより、タイヒミュラー空間を複素解析的に調べることができる。そのような手法としては、リーマン面をクライン群で一意化することにより、タイヒミュラー空間をクライン群の擬等角变形空間と解釈することができる。それにより等角写像や2次微分の手法が使え、タイヒミュラー空間を有限次元複素アフィン空間内の有界領域として実現できる(ベアス埋め込み)。その際に現れる境界がベアス境界で、一般にはフラクタル図形になっている(Y. Komori, T. Sugawa, M. Wada and Y. Yamashita, Drawing Bers embeddings of the Teichmüller spaces of once-punctured tori, *Experimental Mathematics*, Vol. 15 (2006), No.1, 51-60.)。さらにこのようにクライン群で一意化することにより、クライン群の極限集合の3次元双曲空間での凸包の境界に現れる測度付測地線層のデータがリーマン面に付加されて、プリーツ曲線とよばれるタイヒミュラー空間内の曲線が定義でき、そのベアス境界への漸近挙動は興味深い対象である(Y. Komori and J. Parkkonen, On the shape of Bers-Maskit slices, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 32 (2007), 179-198.)。

一方リーマン面を双曲構造の入った曲面とすることにより、タイヒミュラー空間を双曲幾何的に調べることができる。リーマン面をフックス群で一意化することにより双曲距離が定まり、測地線が定義される。ある曲線の自由ホモトピー類を固定すれば、に属する測地線の長さを考えることにより、タイヒミュラー空間上の関数が決まる(長さ関数)。特に単純閉測地線の自由ホモトピー類全体 S の長さ関数を考えることにより、タイヒミュラー空間を無限次元実射影空間内に相対コンパクトに埋め込むことができる(サーストン埋め込み)。その際に現れる境界がサーストン境界で、位相的には球面と同相になっている(*Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Seminaire Orsay*, Asterisque 66-67 (1979))。また最近タイヒミュラー測地線でサーストン境界に収束しない例がみつき、たとえ境界の位相が単純でも測地線の境界への漸近挙動は複雑に成りうる例として注目を集めている(A. Lenzhen, Teichmüller geodesics that don't have a limit in PMF, *Geometry and Topology*, 12:1

(2008) 177-197.)。

2. 研究の目的

このようにタイヒミュラー空間をどのような観点から調べるかによって、様々なコンパクト化とその境界が現れ、色々な計量に関する測地線等のタイヒミュラー空間内の曲線による境界への漸近挙動を調べることで、リーマン面の退化の様子を研究することができる。そこで今回はサーストン・コンパクト化を中心に、タイヒミュラー空間のいくつかのコンパクト化を考察し、そこに現れるリーマン面の退化の様子について考察した。具体的には次の2つのテーマを中心に研究を進めた。

(1)「サーストン・コンパクト化の多面体としての実現問題」

サーストン・コンパクト化はその位相的単純さに加え、写像類群が境界まで作用することや、境界の局所線形構造や、境界が射影的測度付測地線層 PML と解釈できることなど、とても興味深い対象である。しかし無限次元実射影空間内に埋め込まれているため、解析が容易ではない。そこでタイヒミュラー空間の次元プラス1個の単純閉測地線の自由ホモトピー類をうまく選んでサーストン・コンパクト化を有限次元実射影空間内の閉領域、具体的には多面体として実現できるかという問題を考えた。これが実現できれば、多面体への写像類群の作用が具体的に書ける可能性があり、写像類群の力学系の観点からも重要な問題と思われる。

(2)「タイヒミュラー空間内の測地線に関する境界への漸近挙動」

先に挙げたタイヒミュラー測地線のサーストン境界への集積に関する研究以外にも、ヴェイユ・ピーターソン測地線, line of minima や grafting rays のサーストン境界への集積に関しても最近活発に研究されている。宮地秀樹氏(阪大)は極値的長さから定まるガーディナー・メイザー境界の研究を精力的に行っている。本研究ではタイヒミュラー測地線の複素化であるタイヒミュラー円板の境界に現れるリーマン面の退化の様子を詳細に研究した。具体的には双曲型リーマン面上のリーマン面の退化族を構成し、その特異ファイバーやモノドロミー、さらに正則切断について詳細に記述することを研究目的とした。これが実現できれば、写像類群の比較的大きな部分群のタイヒミュラー空間およびその境界への作用が具体的に書ける可能性があり、写像類群の力学系の観点からも重要な問題と思われる。また鏡映群と写像類群の類似性から幾何学的な鏡映群、具体的には双曲コクセター群についての研究も同時に行

った。この研究の方向からも写像類群のタイヒミュラー空間とそのコンパクト化への作用の理解が深まると期待される。

3. 研究の方法

以下ではそれぞれの課題についての研究方法を箇条書きにする。

(1) 「サーストン・コンパクト化の多面体としての実現問題」

Gendulphe (ローマ大学) との共同研究を中心に研究を行った。初年度はオーフス大学およびストラスブル大学での国際会議に参加した際に Gendulphe と直接会って議論を深めた。またこの会議中に出席者と討論する機会も多くあり、今後の研究方針を定めるためにも有意義であった。国内でも数理解析研究所での研究集会で発表する機会があった。

(2) 「タイヒミュラー空間内の測地線の、境界への漸近挙動」

リーマン面の退化族の研究については初年度にオーフス大学およびストラスブル大学での国際会議で招待講演を行った。その際に会議出席者と文献等の情報交換や今後の研究方針について長時間議論する機会が持てたことはとても有意義であった。また国内の多くの研究集会でも招待講演をさせて頂き参加者と意見交換する機会が持てたことも研究の進展にとって重要であった。線形スライスについては山下靖氏 (奈良女子大学) を訪問し、山下氏の作成したコンピュータ・グラフィックを参照しながら議論を深めていった。今後もさらに相互訪問を続けて問題の最終解決までたどり着きたい。双曲コクセター群の研究に関しては前任校での大学院生であった梅本悠莉子氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究を行った。具体的には相互に訪問し討論を重ねて研究を進めた。また日本数学会函数論分科会で研究の進展状況を報告した。

4. 研究成果

以下ではそれぞれの課題についての成果を箇条書きにする。

(1) 「サーストン・コンパクト化の多面体としての実現問題」

初年度において申請者と Gendulphe (ローマ大学) はサーストン・コンパクト化の多面体としての実現について、2次元と3次元の場合に解決した。より一般の場合については次年度の研究により、球面から2点以下の点と1つ以上の円板を除いた双曲型リーマン面以外の有限型リーマン面のタイヒミュラー

空間について、タイヒミュラー空間の次元プラス1個の単純閉測地線の自由ホモトピー類をうまく選んで、タイヒミュラー空間自身を有限次元実射影空間内の多面体の内部領域として実現できることを構成的に示した。しかしこの構成においてサーストン境界が忠実に表現されているかや、退化の様子についての双曲幾何による研究は進まなかった。また球面から2点以下の点と1つ以上の円板を除いた双曲型リーマン面のタイヒミュラー空間の場合について、タイヒミュラー空間の次元プラス1個の単純閉測地線の自由ホモトピー類をうまく選んで、タイヒミュラー空間自身を有限次元実射影空間内の多面体の内部領域として実現する問題は未解決のまま残ってしまった。

(2) 「タイヒミュラー空間内の測地線の、境界への漸近挙動」

初年度にタイヒミュラー空間の境界の研究については複素解析幾何の手法を用いて、トーラスの2重分岐被覆で得られる種数2のリーマン面の退化族を具体的に構成してその特異ファイバーや正則切断をすべて決定した。最終年度は前年度までの結果を一般化し、トーラスの n 重分岐被覆で得られる種数 n のリーマン面の退化族を具体的に構成してその特異ファイバーや正則切断をすべて決定する研究を行った。また1点穴あきトーラスの擬フックス群の変形空間の部分多様体として、以前に山下靖氏 (奈良女子大) と共同研究を行った長さ関数に関する線形スライスとは別に捻れ変数に関する線形スライスを考察し、それがタイヒミュラー空間と同一視できることを示した。これは今まで調べられていない退化の方向を表す新しい材料になると期待される。幾何学的鏡映群の研究については梅本悠莉子氏 (大阪市立大学数学研究所) との共同研究で、3次元の有限体積なコクセター単体の鏡映群の growth rate がペロン数になること、および4、5元生成の3次元双曲コクセター群についても同様の性質を持つことを示した。これらは写像類群の幾何的生成系に関する growth function の研究の方針に今後有益であると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

M. Gendulphe and Y. Komori,
Polyhedral Realization of Thurston
Compactification, The Annales de la
Faculte des Sciences de Toulouse, Ser.6,
Vol.23 (2014), 95-114. 査読有り

Y. Komori and Y. Umemoto,
On the growth of hyperbolic 3-dimensional
generalized simplex reflection groups, Proc.
Japan Acad., 88, Ser. A (2012), 62-65. 査読
有り

Y. Komori,
Cook-hats and crowns, Quasiconformal
mappings, Riemann surfaces, and
Teichmüller spaces, Contemp. Math., 575,
Amer. Math. Soc., (2012) 253-262. 査読有り

Y. Komori and Y. Yamashita,
Linear slices of the quasi-Fuchsian space of
punctured tori”, Conform. Geom. Dyn. 16
(2012), 89-102. 査読有り

Y. Komori,
Projective embeddings of the Teichmüller
spaces of bordered Riemann surfaces,
数理解析研究所講究録 1777(2012), 75-83. 査
読無し

[学会発表](計10件)

Y. Komori,
On degenerate families of Riemann
surfaces over elliptic curves, 離散群と双曲
空間の複素解析とトポロジー、京都大学数理
解析研究所、2014年1月20日

Y. Komori,
On degenerate families of Riemann
surfaces over elliptic curves, Rigidity
School, Tokyo, 東京大学、2014年1月7
日

小森洋平,
トーラス上のリーマン面の退化族について、
日本数学会秋期総合分科会、愛媛大学、
2013年9月26日

小森洋平,
トーラス上のリーマン面の退化
族について、リーマン面に関連する位相幾何
学、東京大学、2013年8月27日

Y. Komori,
Arithmetic aspects of growth rates of
hyperbolic Coxeter groups”, 国際 研究集会

「Growth and Mahler measures in
geometry and topology」ミッタ ク・レフラ
ー研究所、スウェーデン、2013年7月

小森洋平,
トーラス上の種数2のリーマン面の退化
族について、日本数学会春期総合分科会、京
都大学、2013年3月22日

Y. Komori,
On a degenerate family of Riemann surfaces of
genus two over an elliptic curve”, Y. Komori,
国際研究集会「Branched Coverings,
Degenerations, and Related Topics」首都大学、
2013年3月

Y. Komori,
On a degenerate family of Riemann
surfaces induced by a certain Kodaira
surface, Topology seminar, ストラスブール
大学、フランス、
2012年9月3日

Y. Komori,
Linear slices of the quasifuchsian space of
punctured tori, 国際研究集会「Progress in
Low-dimensional Topology: Teichmüller
theory and 3-manifold groups」オーフス大学、
デンマーク、2012年8月

小森洋平
On the growth rates of 3-dimensional
generalized simplex reflection groups
日本数学会春期総合分科会、東京理科大学、
2012年3月26日

[図書]
なし

[産業財産権]
なし

[その他]
なし

6. 研究組織
(1) 研究代表者
小森洋平 (KOMORI, Yohei)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：70264794

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし