

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540234

研究課題名(和文) 軌道の存在確率密度に関する研究

研究課題名(英文) Study of probability density for the existence of orbits

研究代表者

鷲見 直哉 (Sumi, Naoya)

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：50301411

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：軌道同士の振舞いに関する局所的な条件から、軌道の存在確率密度に関する大域的な性質を導く手法を研究した。特に、いくつかの力学系に対して次のことを示した：互いに異なる軌道の組に対して、一方の軌道の近くから他方の軌道の近くに移動する別の軌道がある、という局所的条件が成立するならば、(1) 存在確率密度は一意的に決まる。また、(2) 有限時間での軌道の存在確率密度と、無限に時間が経過した軌道の存在確率密度との差は、エントロピーとポテンシャルという2つの値を用いて評価できる。

研究成果の概要(英文)：We study some technique for deriving global properties of probability density for the existence of orbits from local conditions on the behaviors of pairwise disjoint orbits. In particular, we show the following result for some dynamical systems: if for every pair of orbits, there exists another orbit which transfers from one orbit to the other, then (1) the probability density for the existence of orbits is uniquely determined, and (2) one can estimate the difference between the probability density for the existence of finite orbit and that of infinite orbit, by using the entropy and the potential.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：解析学 力学系 エルゴード理論

1. 研究開始当初の背景

軌道の存在状態(軌道が各領域に存在する時間の割合)を表す確率密度は、力学系理論の初期から扱われている基本的な研究対象である。このような確率密度をもつ測度は、Sinai-Ruelle-Bowen 測度(SRB 測度)と呼ばれ、Anosov 系や部分双曲型力学系など幾つかの力学系に対してその存在が証明されている。この確率密度に対し Palis は、力学系全体の中でジェネリックな力学系に対して、軌道の存在確率密度の存在を予想している。

2. 研究の目的

本研究の目標は、上記の Palis の予想を踏まえ、これら存在確率密度のもつ性質を明らかにすることである。特に、(1) 軌道の存在確率密度の一意性と、(2) 存在確率密度の時間変化の速さ、という2つの性質は重要である。なぜなら、存在確率密度の一意性は、力学系が個々の軌道に依らない1つの平衡状態をもつことを保証し、存在確率密度の時間変化の速さは、軌道がその平衡状態に近づく速さを意味するからである。ゆえに、これら2つの重要な性質を中心として研究を行う。

上記の(1)を示すことは、SRB 測度のエルゴード性を示すことであり、上記の(2)を示すことは、SRB 測度に対する大偏差原理のレート関数を決定することを意味する。

本研究では、3で述べる力学系に関する局所的な条件(*)のもとで、SRB 測度のエルゴード性を証明すること、並びに、大偏差原理のレート関数をエントロピーとポテンシャルという2つの値を用いて具体的に表すことを目標とする。同時に、条件(*)がどのようなクラスの力学系に対して成立しているのか決定することを目指す。

3. 研究の方法

軌道の存在確率密度の一意性は、平衡状態という大域的状态に関わる性質であるから、それを導くためには、軌道同士が無関係に振舞っているとは考え難い。そのため本研究では、軌道同士に関する次の条件(*)を考える：互いに異なる軌道の組に対して、一方の軌道の近くから他方の軌道の近くに移動する別の軌道がある。

更に、与えられた力学系のほとんど全ての軌道に対して、その周りの軌道が指数的な速さで離れていくか、または接近するかのいずれかである場合を考える。(すなわち、リャプノフ指数 0 を持たない場合を考える。)このとき、軌道に対して安定多様体と不安定多様体を考えることができ、上記の条件(*)は、これら安定・不安定多様体が交点を持つこと、と言い換えることができる。

このような条件(*)のもとで、上記の研究目的の達成を目指す。

本研究目標の達成により、平衡状態の一意性という大域的な性質は、局所的な軌道同士

の条件から導かれることが結論付けられる。更に、軌道がその平衡状態に近づく速さも、エントロピーとポテンシャルという大域的な量によって与えられることがわかる。このような大域的な性質と局所的な条件との関係は、Viana らを中心としたこれまでの存在確率密度の研究では扱われなかったことであり、本研究により初めて明らかにされることである。

4. 研究成果

(1) まず、存在確率密度の時間変化の速さに関して次を示した：与えられた測度に対して、ほとんど全ての軌道が Lyapunov 指数 0 を持たないとし、また、ほとんど全ての軌道の組に対して、それぞれの安定多様体と不安定多様体が横断的に交差するとする。このとき、次が成り立つ：(a) 軌道の存在確率が与えられた測度と一致するような初期点全体の位相的エントロピーは、測度のエントロピーと一致する。(b) 軌道の存在確率が与えられた測度と一致するような初期点全体の Hausdorff 次元は、測度のエントロピーを最大 Lyapunov 指数で割り、安定多様体の次元を足した値を用いて下側から評価できる。(c) 軌道の存在確率が与えられた測度に近くなるような初期点全体の Lebesgue 測度は、測度のエントロピーから正の Lyapunov 指数全体の和を引いた値を用いて下側から評価できる(論文)。

この結果は、almost Anosov 写像、pseudo Anosov 写像 $Mañé$ の derived from Anosov 写像などの具体例に適用することができる。

Araújo-Pacífico は、中心方向がほとんど拡大的部分双曲型写像に対して、存在確率密度の時間変化の速さを上側から評価している。しかしながら、下側からの評価は、エルゴード的な測度に関する Young の結果しか知られていない。我々の結果は、Young の結果を、部分的にはあるが、非エルゴード的な測度の場合に拡張したものになっている。

(2) 次に、軌道の存在確率密度の一意性に関して次を示した：SRB 測度に対して、ほとんど全ての軌道が Lyapunov 指数 0 を持たないとし、また、ほとんど全ての軌道の組に対して、それらの安定多様体と不安定多様体の次元が等しく、かつ交差するとする。このとき、SRB 測度はエルゴード的である。この結果は、現在投稿中である。

この結果は、アクセス可能性を満たすような Buzzi-Fisher-Sambarino-Vásquez による mixed $Mañé$ example に適用することができる。

この結果を用いると、次元の低い多様体に対して、軌道の存在確率密度の一意性を示すことができる。

軌道の存在確率密度の一意性については、Pugh-Shub による次の予想が知られている：体積を保存する部分双曲型写像が、本質的ア

クセス可能性をもつならば、エルゴード性をもつ。Burns-Wilkinson は、center bunched という条件の下でこの予想を解決した。しかしながら、現在でも center bunched という条件を省くことはできていない。実際に、Lyapunov 指数 0 のとき、Pugh-Shub の予想が成り立つかどうかでさえ未解決である (Burns-Dolgopyat-Pesin)。本研究は、これらの予想の解決に貢献できるものと考えている。

(3) また、上記の条件(*)を持つ力学系の特徴付けを目標として、測度論的拡大性を持つ力学系を扱った。ここで、測度論的拡大性とは、軌道の周りに留まる軌道の測度が 0 であることを意味する。

このとき、次を示した：(a) 全ての非アトミックな不変測度が測度論的拡大性を持ち、系に C^1 級の微小な摂動を加えてもその性質が保たれるならば、このような力学系はサイクルを持たない公理 A 微分同相写像である。(b) 全ての非アトミックな測度が測度論的拡大性を持ち、系に C^1 級の微小な摂動を加えてもその性質が保たれるならば、このような力学系は quasi-Anosov 微分同相写像である (論文)。

他方で、次のことを証明した：(c) 全ての非アトミックなエルゴード的不変測度が測度論的拡大性を持ち、系に C^1 級の微小な摂動を加えてもその性質が保たれる写像で、公理 A 系ではないものが存在する。(d) C^1 微分同相写像全体の中でジェネリックな写像に対して、ジェネリックなエルゴード的不変測度は測度論的拡大性を持つ。この結果は現在投稿中である。

測度論的拡大性は、拡大性という概念の一般化である。ここで、拡大性とは、軌道の周りに留まる軌道が自分自身しか存在しないことを意味する。このとき、Mañé は次のことを示した：系に C^1 級の微小な摂動を加えても拡大性が保たれるならば、このような力学系は quasi-Anosov 微分同相写像である。我々の結果は、この結果の拡張になっている。

公理 A を満たす力学系は、その非遊走集合を、条件(*)を満たす有限個の成分に分解できることが知られている。しかし、条件(*)を満たす力学系として、公理 A は条件が強すぎる。本研究結果(c)より、全ての非アトミックなエルゴード的不変測度が測度論的拡大性を持つような写像のクラスを上手く特徴付けることができれば、条件(*)を満たす力学系の特徴付けに役立つものと考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

K. Sakai, N. Sumi, K. Yamamoto,

Measure-expansive diffeomorphisms, J. Math. Anal. Appl. 414 (2014) 546-552, 査読あり.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.01.023

K. Moriyasu, K. Sakai, K. Yamamoto, Regular maps with the specification property. Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 7, 2991-3009, 査読あり.

DOI:10.3934/dcds.2013.33.2991

M. Hirayama, N. Sumi, Hyperbolic measures with transverse intersections of stable and unstable manifolds, Discrete and Cont. Dynamic. Systems, 33 (2013), 1451-1476, 査読あり.

DOI:10.3934/dcds.2013.33.1451

M. Hirayama, Entropy of Hadamard spaces. Topology Appl. 158 (2011), no. 4, 627-635, 査読あり.

DOI:10.1016/j.topol.2010.12.011

[学会発表](計9件)

鷲見直哉, Large deviation for certain systems derived from Anosov, 非線形・平衡系シンポジウム II 複雑系とエルゴード理論 -, 2014年3月13日, 早稲田大学染谷記念国際会館

鷲見直哉, 部分双曲型力学系の大偏差原理, 2013年度冬の力学系研究集会, 2014年1月10日, 広島大学東千田キャンパス

鷲見直哉, 部分双曲型力学系の大偏差原理, 力学系・カオス・複雑系のエルゴード論, 2013年8月28日, 早稲田大学染谷記念国際会館

鷲見直哉, On the ergodicity of hyperbolic SRB measures on low-dimensional manifolds, 2012年度冬の力学系研究集会, 2013年1月11日, 日本大学軽井沢研修所

鷲見直哉, Diffeomorphisms preserving hyperbolic SRB measures, Recent Trends in Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2012年12月26日, The Maharaja Sayajirao University of Baroda, Vadodara, India

鷲見直哉, 双曲型 SRB 測度の accessibility property について, 力学系とその周辺分野の研究, 2012年7月12日, 京都大学数理解析研究所

鷲見直哉, On the ergodicity of hyperbolic SRB measures, Dynamics of Complex Systems 2012, 2012年3月6日, 北海道大学

鷺見直哉 , On the ergodicity of hyperbolic SRB measures, 2011 年度冬の力学系研究集会, 2012 年 1 月 6 日, 日本大学軽井沢研修所

鷺見直哉 , On the ergodicity of hyperbolic SRB measures, Frontiers in Dynamical systems and Topology, 2011 年 11 月 25 日, 京都大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鷺見 直哉 (SUMI NAOYA)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号 : 50301411

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

平山 至大 (HIRAYAMA MICHHIRO)
九州工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号 : 50452735

守安 一峰 (MORIYASU KAZUMINE)
徳島大学・ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授
研究者番号 : 60253184