

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 21 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540240

研究課題名(和文) 移流および非局所項をもつ偏微分方程式の逆問題と境界制御問題の研究

研究課題名(英文) Research on inverse problems and boundary control problems for partial differential equations having transport and nonlocal terms

研究代表者

中桐 信一 (Nakagiri, Shin-ichi)

神戸大学・大学院システム情報学研究科・名誉教授

研究者番号：20031148

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：移流および非局所項をもつ偏微分方程式の逆問題および境界制御問題を、変形公式法に基づいて研究した。移流拡散方程式に現れる未知の移流項を境界観測から一意的に決定し、さらに関連する制御系に対し望ましい安定性をもつ境界制御則を具体的に構成した。その際移流項と非局所項を同時変形する新たな変形公式を用いるが、その変形核関数の存在と構成の問題を解いた。さらに、変形公式法を1階のボルテラ型積分微分方程式系に拡張した。この変形核関数を用いて関連するボルテラ系の境界制御問題と逆問題を解決した。

研究成果の概要(英文)：Inverse problems and boundary control problems for partial differential equations having transport and nonlocal terms are investigated by the method of deformation formulas. For the transport diffusion equations, the investigator has determined uniquely the transport term by boundary observation, and for the associated control system having nonlocal terms, he has constructed a concrete boundary feedback control law which makes the system a desirable stable state. The key to solve the problems is to use the deformation formula which deforms the transport term and nonlocal terms simultaneously, and the investigator has solved the problem of existence and construction of such a deformation kernel function. In addition, the deformation formula is extended to a system of first order Volterra integro-differential equations. By using the kernel, he has solved the related inverse and boundary control problems for the Volterra system.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数解析 逆問題 移流拡散方程式 ボルテラ型微分積分方程式 変形公式 スペクトル解析 境界制御 最適制御

### 1. 研究開始当初の背景

数理工学に現れる様々な制御対象は、数学的モデルとして表現すると、しばしば偏微分方程式系として表現される。

例えば水溶性物質の輸送過程を記述すると、移流拡散方程式になるが、これに境界制御項と状態フィードバックを加えると非局所項をもつ拡散方程式になる。この方程式系を安定化する、さらに移流項を同定することは工学上重要な問題であるが、従来の解析では数値的にしか解決されていなかった。空間次元1の場合に、2004年に Smyshlyaev と Krstic により、この問題が逆問題における変形公式を用いて巧妙に解決された。彼らの手法は変形された単純な方程式系において、境界制御項を0にする閉ループ制御を構成するものでその制御則に変形核を含んでいる。この手法は適用範囲が広く、彼らの研究グループは別の様々なタイプの方程式系の安定化問題に適用し多くの結果を得た。彼らの解析は、実に豊富なアイデアに富むものであるが、その数学的解析はかなり荒っぽいものである。厳密な数学解析の立場から、彼らの結果を見直し、さらには新たな研究方向に向け内容を深化させようと考えたのが本研究の動機である。

報告者の長年にわたる研究テーマは、逆問題と偏微分方程式の最適制御問題や境界制御問題である。このテーマに関しては、膨大な研究の蓄積がある。例えば、Romanov, Yurko, Isakov, Buterin, Klibanov (ロシア)、Kunisch, Engl (オーストリア)、Lions, Puel (フランス)、Zuazua (スペイン)、Banks, Ito, Gutman (米国)、Ahmed, Barcilon (カナダ)、Liu, Li, Zhang (中国)、また国内では山本、山崎(東大)、鈴木、久保(阪大)、上村(海洋大)等が様々なタイプの偏微分方程式の逆問題とその同定手法およびそれらの制御問題を研究している。しかしそれらには、方程式自体に非局所項や過去の履歴を考慮した積分項などは含んでいない。さらには、高度で複雑な計算手法に基づく理論であったりして、そのままでは上記の非局所的な作用素をもつ偏微分方程式に適用できない場合が多い。本研究では、先行研究をふまえた上で、考察する方程式自体を単純な取り扱いの容易な方程式に変形するという、変形公式法に基づいて、様々なタイプの非局所的偏微分方程式の逆問題および境界制御問題を解決しようと計画した。

### 2. 研究の目的

本研究では、数理工学における基礎的かつ重要な問題として、1で述べたような偏微分方程式系の逆問題と関連する境界制御や安定性の問題を理論的に考察することを目的と

して研究を開始した。

特に、方程式自体に非局所項や積分項を含む場合にも適用できる理論構築を目指した。具体的には、次の2つのテーマに分けて研究を進めた。

(1) 非局所項を持つ1階双曲型ボルテラ微分積分作用素の変形公式とその応用の研究。この場合に新たな変形公式とその変形核を構成する。作用素の生成する半群を構成し、さらに変形核を用いた構造作用素を導入することにより、抽象空間で境界制御系を定義する。このとき、適当な境界制御により系は完全可制御性であることを示す。また構造作用素が解半群の生成作用素のスペクトルに及ぼす影響を調べる。この半群と時間遅れ方程式の解半群の構造理論との密接な関係を明らかにし、それを用いて系の可制御、可観測性を調べる。更には、線形結合された多変数系に対する同様の半群構造研究も行う。

(2) 非局所項を持つ2階ボルテラ微分積分作用素の変形公式とその応用の研究。この作用素に対し変形公式とその変形核を構成する。この場合は、変形核はかなり複雑な方程式の解となる。従ってまず、移流項とポテンシャル項のみ現れる場合を考察する。鈴木貴により展開された変形公式理論は、申請者によりこの非自己共役な場合に拡張されている。この変形公式により境界データから係数を決定するという放物型逆問題を解決する。加えて非局所項が存在する場合に、移流項や非局所項を境界データから再構成する理論を構築する。加えて対応する発展系の境界制御による可制御、可観測性、安定化の問題を解決しようとする。

### 3. 研究の方法

1階および2階の、非局所項を持つボルテラ微分積分作用素の変形公式とその制御、逆問題への応用を函数解析的手法により研究する。1階の場合には、作用素に含まれる移流項、非局所項およびボルテラ核を別のそれらに変形する変形核の存在とその満たすべき方程式を見出す。その変形公式を用いて、片側境界制御による完全可制御性の問題を解決する。またこの作用素のスペクトル解析を実行し、一般化固有ベクトルの完備性を証明する。その際に、時間遅れ方程式との深い関連性を示す。2階の場合にも同様の解析を行うが、特に移流項とポテンシャル項のみを持つ場合の逆問題解析に焦点を当てて研究を進める。また結果のシステムへの拡張と安定化問題への変形公式の応用を考察する。

(1) 移流項とポテンシャル項をもつ拡散方程式の逆問題の研究。この場合に新たな変形

公式とその変形核を構成する。それにより境界データから係数を決定するという放物型逆問題を解決する。ゲリファント-レビタン(G-L)理論から推測されるように、移流項とポテンシャル項同時の一意性はいえないが、新たな変形公式の使用によりそれらの間の必要かつ十分条件を見出すことができる。その結果どちらか一方の一意性はいえることになる。ポテンシャル項が消える場合にも、ボルグ型のスペクトル逆問題や移流項の非一意性の問題を解決しようとする。加えて双曲型逆問題の解決もはかる。G-L理論の非自己共役版である、境界データから移流項を再構成する理論の構築を進める。

(2) 移流拡散方程式系の境界可制御性と可制御可観測性の研究。この方程式系に対し、新たな変形公式とその変形核を構築する。変形核を用いることにより、任意の指数オーダーで収束するフィードバック解を構成できる。加えて、境界データから係数を決定するという放物型逆問題を解決することができる。さらに対応するスペクトルの構造を明らかにすることにより、可制御可観測性の問題を解決する。

(3) 非局所項を持つ2階ボルテラ微分積分方程式の変形公式の研究。考察する方程式は、ボルテラ項と離散的な非局所項および境界条件にも非局所項が現れる拡散方程式とする。この場合の変形核はかなり複雑な方程式の解となり、各項の影響がどのように及ぶかを詳細に検討しつつ解の構成を行う。まずこの放物型方程式の解半群を構成し、ついで変形された単純な熱方程式の解半群の構造から逆にこの解半群の構造を調べようとする。生成作用素のスペクトルの分布や一般化固有ベクトルがリース基底になるための条件を探る。その後、放物型方程式の境界制御問題を考察し、変形公式を使うことにより指数安定化の問題を解決する。加えてリース基底の完備性の条件のもとで、近似可制御性や可観測性の問題を考察する。

(4) 非局所項を持つ1階双曲型ボルテラ微分積分方程式系の半群理論の研究。1階の場合にも新たな変形公式とその変形核を構成する。ついで方程式の解半群を構成し、さらに変形核を用いた構造作用素を導入することにより、抽象空間で境界制御系を定義する。このとき、適当なフィードバック境界制御により系は完全可制御性であることを示す。また構造作用素が解半群の生成作用素のスペクトルに及ぼす影響を調べる。この解半群は申請者の研究した時間遅れ方程式の解半群の構造理論と密接な関係をもつ事を明らか

にし、それを用いて系の可制御、可観測性の問題を解決しようとする。

#### 4. 研究成果

(1) 非局所項を持つ2階のボルテラ微分積分作用素の構造を、新たな変形作用素を導入し簡単な2階微分作用素に変形する事により調べた。さらには、移流拡散方程式に対して変形公式を用いて、移流項とポテンシャル項に関する逆問題を考察し一意性のための十分条件を導いた。またこの作用素の生成する連続半群の構造を調べた。つまり、生成作用素のスペクトル分布と一般化固有ベクトルがリース基底になることの証明を与えた。さらには、この考察を進め非局所項があってもスペクトル密度関数から、ある物理量を再構成するゲリファント-レビタン理論が可能になることを示した。これらの結果は、工学的にも重要な応用を持つ。本テーマに関し、期間中3編の学術論文を出版した。

(2) 非局所項を持つ1階ボルテラ微分積分方程式に対して、新たな変形公式を構成しその変形核を用いることにより境界制御による安定化問題を解決した。さらにその結果を係数行列が巡回的であるようなシステムに拡張した。加えて変形作用素を導入することにより、半群理論に基づく安定性理論の構築を図った。すなわち、この作用素のスペクトル解析を実行し、一般化固有ベクトルの完備性の十分条件を与え、制御観測の作用素が安定性理論に果たす役割を明らかにした。その際スペクトルの構造を調べることになるが、ペーリー-ウィナー型の定理等のフーリエ解析や複素関数論の深い結果が必要になる。研究の進展に伴い、係数行列の巡回性の条件を取り外すことができた。これにより、より広汎なボルテラ系に対して、変形公式法が適用可能なることが示された。本テーマに関しては期間中4編の学術論文を出版した。

(3) 本研究計画で挙げたテーマ以外の研究も行った。具体的には量子制御問題、カーン・ヒリアード系と分布神経系の最適制御問題である。また非線形の粘性項をもつ波動方程式の解の存在定理を証明した。また、2階の減衰項をもつ線形発展方程式系に対し、最適制御問題に付随する新たなリッカチ方程式を導いた。これらに関し、期間中5編の学術論文を出版した。これらは、海外の研究者との共同研究の成果である。

論文発表以外に、スイス、クロアチア、韓国(プサン、済州島)での国際学会において講演を行い、研究成果を発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計12件)

Q-F. Wang, S. Nakagiri, Optimal control of distributed parameter system given by Cahn-Hilliard equation, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Vol. 19-1 (2014), pp. 19-33, 査読有.

S. Nakagiri, Structural properties of solution semigroups for nonlocal diffusion equations, Proceedings of the Internat. Conference on Computing, Mathematics and Statistics 2013 (iCMS2013), (2013), CDROM 11pages 査読無.

S. Nakagiri, Deformation formula and solution semigroups for hyperbolic Volterra integro-differential systems, Mathematical Applications in Science and Mechanics, Mathematics and Computers in Science and Engineering Series, WSEAS Press, Vol.14 (2013), pp. 181-188, 査読有.

S. Nakagiri, Deformation formulas and boundary control problems of first-order Volterra integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, IMA J. Math. Control Inform., Vol. 30 (2013), pp. 345-377, 査読有.

S. Nakagiri, Boundary controllability of nonlocal diffusion equations, Proceedings of Seminar on PDE in Osaka, Osaka Univ. (2013), pp. 111-120, 査読無.

J-H. Ha, S. Nakagiri, Riccati equations in quadratic optimal control problem of damped second order systems, J. Korean Math. Soc., Vol. 50 (2013), pp. 173-187, 査読有.

Q-F. Wang, S. Nakagiri, Sensitivity of optimal control for diffusion Hopfield neural network in the presence of perturbation, Appl. Math. Comput., Vol. 219-8 (2012), pp. 3793-3808, 査読有.

S. Nakagiri, An inverse flux problem for plug-flow reactor diffusion equations, Mathematical Methods for Information Science & Economics: Proceedings of the 17th WSAES Internat. Conference on Applied Mathematics, (2012), pp. 65-72, 査読有.

S. Nakagiri, Deformation formulas and inverse problems for advection-diffusion equations, Proceedings of the Internat. Workshop on Simulation and Modeling related to Computational Science and Robotics Technology (SiMCRT2011), Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, IOS Press BV, The Netherland, Vol. 37 (2012), pp. 61-78. 査読有.

S. Nakagiri, Boundary control problems of first-order Volterra integro-differential systems, Advances in Differential Equations and Control Process, Vol. 9 (2012), pp. 75-113, 査読有.

J-S. Hwang, S. Nakagiri, H. Tanabe, Solutions of quasilinear wave equation with strong and nonlinear viscosity, J. Korean Math. Soc., Vol. 48 (2011), pp. 867-885, 査読有.

Q-F. Wang, S. Nakagiri, Quantum numerical control for free elementary particle, Applied Mathematics and Computation, Vol.217 (2011), pp.5695-5701, 査読有.

〔学会発表〕(計18件)

国際会議および海外講演(計9件)

S. Nakagiri, Structural properties of solution semigroups for nonlocal diffusion equations, Internat. Conference on Computing, Mathematics and Statistics 2013 (iCMS2013), Malaysia, August 28-29., 2013.

S. Nakagiri, Deformation formula and solution semigroups for hyperbolic Volterra integro-differential systems, The 4th European Conference for the Applied Mathematics and Informatics (AMATH'13), Dubrovnik, Croatia, June 25-27, 2013.

S. Nakagiri, Structural properties of semi-groups for hyperbolic Volterra integro-differential systems, Functional Analysis and Applications, Evolution Equations and Control Theory, Conference in honor of Prof. Shin-ichi Nakagiri on the occasion of his retirement, Kobe University, Kobe, Japan, February 11-13, 2013, 招待講演.

S. Nakagiri, An inverse flux problem for plug-flow reactor diffusion equations, Advances in Dynamical Systems and Control, The 17th WSAES Internat. Conference on Applied Mathematics, Montreux, Switzerland, December 29-31, 2012.

J-H Ha, S. Nakagiri, S-J. Lee, The optimal control problem of a linear hyperbolic system, International Conference on Computational Design in Engineering, Jeju, Korea, November 13-16, 2012.

Y-C Kwun, S. Nakagiri, Y-G. Lee, J-S. Hwang, J-H. Park, Controllability of extremal solution for fuzzy differential equations driven by Liu process, Korean Institute of Intelligent Systems Fall Conference 2011, Pusan, Korea, December 2-3, 2011.

S. Nakagiri, Inverse problems for advection-diffusion equations, Invited Lecture at Department of Mathematics Education, Daegue University, Korea, December 2, 2011, 招待講演.

S. Nakagiri, Semigroup theory for nonlocal parabolic equations, Invited Lecture at Pukyung National University, Korea,

December 5, 2011, 招待講演.  
S. Nakagiri, Deformation formulas and inverse problems for advection-diffusion equations, Internat. Workshop on Simulation and Modeling related to Computational Science and Robotics Technology (SiMCRT2011), Kobe University, Kobe Japan, November 1-3, 招待講演.

国内会議 (計 9 件)

中桐 信一, 双曲型ボルテラ微積分方程式系の解半群の構造的性質, 2013 年度日本数学会函数解析分科会 2013.3.23 京都大学.

中桐 信一, Identifiability of advection-diffusion equations, 2012 年度日本数学会函数解析分科会 2012.9.19 九州大学.

S. Nakagiri, Boundary controllability of nonlocal diffusion equations, Seminar on Partial Differential Equations in Osaka, 2012, Osaka University, 2012.8.23 大阪大学吹田キャンパス.

中桐 信一, 移流拡散方程式系の移流項の同定問題, 熊本大学 数学談話会 2012.8.3.

中桐 信一, 移流拡散方程式系の逆問題, 愛媛大学 第 97 回解析セミナー 2012.6.29.

中桐 信一, 有限区間上の非局所 Gel'fand-Levitan 理論, 2012 年度日本数学会函数解析分科会 2012.3.29 東京理科大学.

中桐 信一, Structural properties of semigroups associated with nonlocal parabolic equations, 微分方程式の定性的理論ワークショップ --古用哲夫先生ご退官記念研究集会 2012.3.3 島根大学 理工学部.

中桐 信一, Deformation formulas for nonlocal parabolic equations and their associated semigroups, 研究集会「放物型発展方程式とその応用」八木先生・出版記念集会 2011.9.23 大阪大学 工学部.

中桐 信二, 移流拡散方程式の逆問題, 夏の偏微分方程式セミナー 2011, 2011.8.5 龍谷大学セミナーハウス「ともいき荘」.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://s1nakagiri.blogspot.jp/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

中桐 信一 (NAKAGIRI SHIN-ICHI)

神戸大学・大学院システム情報学研究所・

名誉教授

研究者番号 : 20031148

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし