様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年 １０ 月 ２１ 日現在

機関番号：１７４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2011～2015

課題番号：２３５４０２４７

研究課題名（和文）一般超幾何関数とモノドロミー保存変形による可積分系の大域的研究

研究課題名（英文）Study of general hypergeometric functions and integrable systems coming from monodromy preserving deformation

研究代表者

木村　弘信（KIMURA, Hironobu）

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：４０１６１５７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：特殊関数というよい性質を持つ関数の中でガウスの超幾何関数やパンルベ関数は微分方程式の解となる，積分表示をもつ，差分関係式を持つなどで特徴づけられる．これらを一般化し統一的な方法で記述して，その本質を明確にする研究を行った．これらを一般化した一般超幾何方程式(GHGS)と一般Schlesinger系(GSS) はともにグラスマン多様体上で定義された線形，非線形微分方程式系である．GSSの解の中で，GHGSの解で表現される解があるか，どのような形で表示されるかを，Shah &　Woodhouseの結果を深めることによって調べた．その副産物として準古典直交多項式との関連を見出した．

研究成果の概要（英文）：Among special functions, which have good properties, we know the Guass hypergeometric function and Painleve functions which can be characterized by differential equations, integral representations, and contiguity relations. Our study is to generalize and describe them in a unified way. This viewpoint enables to understand why the good properties hold for these objects. The general hypergeometric systems (GHGS) and the general Schlesinger systems (GSS), which generalize Gauss hypergeometric equation and Painleve equations, respectively, are both defined on the Grassmannian manifold. We gave the explicit form of monodromy preserving deformation which gives GSS. We studied, by examining the results of Shah and Woodhouse, when GSS has solutions expressed by the solutions of GHGS and how these solutions can be expressed using solutions of GHGS. As a by-product, we found the relation between the theory of semi-classical orthogonal polynomials and the particular solutions of GSS.

研究分野：解析学

キーワード：特殊関数　可積分系　Twistor theory　Radon transform　超幾何関数

１．研究開始当初の背景

（1）1986 年に Gelfand によって導入された Grassmann 多様体 Gr(r,N) 上の超幾何関数は, Gauss の超幾何関数の Euler 積分表示を, $GL_4(C)$ の Cartan subgroup の普遍被覆群の指標の Radon 変換と理解することによって得られた．申請者は，1992 年にこれを Gauss の超幾何関数だけでなく，その合流型超幾何関数である Kummer, Bessel, Hermite, Airy 関数を簡単な場合として含む一般超幾何関数(HGF)を導入した．それは，$GL_N(C)$ の正則元の中心化群として得られ，N の分割 λ により指定される極大可換部分群の普遍被覆群を考え，その指標の Radon 変換として定義される．例えば Gauss，Kummer，Bessel，Hermite，Airy は ４の分割 1+1+1+1，2+1+1,2+2,3+1,4 で決まる Gr(2,4) 上の一般超幾何関数と把握される．一方，1993 年に Mason-Woodhouse は非線形可積分系の中で基本的な Painleve 方程式 P6,P5,P4,P3,P2 と同等な Schlesinger 系（退化した系も含む）を，複素時空 $C^4 \subset Gr(2,4)$ 上の $SL_2(C)$ を gauge 群とする反自己双対 Yang-Mills 方程式（ASDYM）の特殊解を決める方程式として導出した．そのアイデアは，$GL_4(C)$ のある部分群の Gr(2,4)への作用で不変な接続を求めるとものて，用いられた群は一般超幾何関数を定義するときの極大可換部分群である．さらに Woodhouse 達は， ASDYM を Gr(2,N)上に一般化した GASDYM に対して同様のことを考察し，$GL_N(C)$の Cartan 部分群を用いて Schlesinger 系を導いた．さらにその退化した系である一般 Schlesinger 系を導く monodromy 保存変形が得られることを示唆した．

（2）量子 Painleve 系と超幾何．2006 年に名古屋創は Painleve 系の Hamiltonian H(t,q,p)において p を d/dq に置き換えて得られる作用素に対する Schrodinger 方程式の q に関する m 次多項式解は超幾何タイプの m 重積分で与えられることを示した．これは Painleve 方程式と超幾何関数を繋ぐもう一つの道であると認識された．

２．研究の目的

（1）Gelfand や申請者によって導入された Grassmann 多様体上の一般超幾何関数(HGF)と，monodromy保存変形によって得られる一般 Schlesinger系（GSS)を，Twistor理論の視点から統一的に調べること．

(2)Painleve方程式の正準量子化により現れるSchrodinger方程式の特殊解である超幾何タイプの関数をde Rham理論の枠組みで調べること．

３．研究の方法

（1）GSS を与える monodromy 保存変形の具体的表示を与えること．

（2）GSS の HGF を seeds とする特殊解を Ward-Ansatz の手法を用いて記述する．

（3）GSS の Hamilton 構造を明らかにする．特に Ward-Ansatz の手法による解とτ関数の関係を明確にする．

（4）量子 Painleve 方程式の特殊解として現れる超幾何積分を de Rham 理論の立場から理解するために，付随する cohomology 群と homology 群を決定する．さらにそれを Gr(2,N)上の超幾何関数に対応する場合に拡張する．

４．研究成果

（1）量子 Painleve 方程式については，2 型に対する簡単な場合に多項式解の積分表示に付随した代数的 cohomology を決定した．まだ最終的な結果ではないので発表はしていない．

（2）最近発展の著しい Fuchs 型常微分方程

式の rigid 系の理論を用いて，Grassmann 多様体上の超幾何微分方程式を直線に制限して得られる Fuchs 型微分方程式の rigidity を調べた．Gr(3,6)上の超幾何方程式は，それを Gr(3,6)のどの直線に制限しても，rigid にはならないことが示された．これは，Gr(2,N)上の超幾何方程式を一般の直線に制限すると rigid になることと状況を異にする．

（3）q-超幾何関数の量子群からの研究を行った．古典的なガウスの超幾何方程式の q-類似であるハイネの q-超幾何方程式やガウスの超幾何関数の合流型方程式の q-類似については，大山陽介氏の結果があり q-差分方程式の分類がある．その解についてジャクソン積分による積分表示を与えた．これらの積分表示を量子群の視点から理解することを試みた．この q-超幾何方程式は古典的な場合，Grassmann 多様体 Gr(2,4)上の超幾何方程式として理解され，積分表示は $GL_4(C)$の極大可換部分群の指標のラドン変換として与えられる．この描像を q-超幾何の場合にも適用するために，量子 Grassmann 多様体 $Gr_q(2,N)$の点によって決まる非可換な積分変数の一次式のべき関数の積を古典的な場合の被積分関数に相当ものとして定義し，これへの量子群の作用を調べることにより、微分方程式系の q-差分版が得られることを示した．
Gr(2,N)上の合流型超幾何方程式の q-類似については、n の分割が 1 と 2 のみからなる場合に同様のことを示した．この結果はフランスの Strasbourg 大学で開催された研究集会「」で発表した．

（4）Twistor 理論の視点から，Schlesinger 系とその退化した系を統一的に記述する，一般 Schlesinger 系の monodromy 保存変形を具体的に与えた．その結果を論文①として発表した．

（5)N の分割λに対応する Gr(2;N) 上の HGF の積分表示の被積分関数 w を weight とする準古典直交多項式を考察し，直交多項式理論において重要な moment を成分とする Hankel 行列式が同じ分割に対応する GSS の特殊解との関連を与えた．これによって準直交多項式理論と monodromy 保存変形による GSS との関係がこれまでよりも一般的な形で明確になった. これは Woodhouse と Shah が GASDYM の Ward Ansatz 解の構成を行っていたが，彼らの計算をさらに深めることによって得られたものである．この結果は，2015 年 4 月に台湾の Institute of Mathematics in Academia Sinica で開催された研究会「"Recent progress of integrable systems", 2015 年 9 月にポーランドでの研究集会「Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations」および 2016 年 1 月にフィリピンのセブ島で開かれた研究集会「International Conference on Partial Differential Equations: General Theory and Variational Problems」で発表した．Hankel 行列式と，GSS に対するモノドロミー保存変形において現れる τ 関数との関係は明確にはできなかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

① H. Kimura, D. Tseveenamjil, General Schlesinger systems and their symmetry from the view point of twistor theory, J. Nonlinear Math. Phys.,査読有，**20** suppl. 1, 130-152, (2013).

② H. Kimura, On a problem of arrangements related to the hypergeometric integrals of confluent type, Adv. Stud. Pure Math.　査読有，　**62**, 137-155, (2012)

③ H. Kimura, On Wronskian determinant formulas of the general hypergeometric functions, Tokyo J. Math.　査読有，**34**, 507-524, (2011)

④ M. Noumi， S. Tsujimoto, Y. Yamada, Pade interpolation for elliptic Painleve equation, ***Symmetries, Integrable Systems and***

Representations, Springer Proc. Math. Stat.,**40**, 463-482 (2012).
⑤ K. Iwasaki, Cubic harmonics and Bernoulli numbers, J. Combin. Theory Ser. A, **119**, 1216-1234, (2012).
⑥ H. Sakai, Ordinary differential equations on rational elliptic surfaces, ***Symmetries,*** *integrable* ***systems and representations*** Springer Proc. Math. Stat., **40**, 515-541, (2012).

〔学会発表〕（計 4 件）

① H.Kimura, Relation of semi-classical orthogonal polynomials to the general Schlesinger systems, "International Cinference in Partial Differential Equations: General Theory and Variational Problems, Philippines, Cebu, January, 2016.
② H.Kimura, Orthogonal polynomials and General Schlesinger systems, "Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations", Poland, Bedlewo, September, 2015.
③ H.Kimura, General Schlesinger systems and Ward Ansatz solutions, "Recent progress of integralble systems, Taipei, Institute of Mathematics in Academia Sinica, April, 2015.
④ H. Kimura, On Jackson integral representation for q-hypergeometric functions, ,日仏共同研究シンポジュウム"Recent Progress in the Painleve equations: algebraic, asymptotic and topological"Strasbourg, France, November, 2013.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
木村弘信（KIMURA Hironobu）
熊本大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：４０１６１５７５
(2)研究分担者

(3)連携研究者
原岡喜重（HARAOKA Yoshishige）
熊本大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：３０２０８６６５

野海正俊（NOUMI Masatoshi）
神戸大学・理学系研究科・教授
研究者番号：８０１６４６７２

岩崎克則（IWASAKI Katsunori）
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号：００１７６５３８

坂井秀隆（SAKAI Hidetaka）
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号：５０３２３４６５

(4) 研究協力者
名古屋創（NAGOYA Hajime）