

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 26 日現在

機関番号：35406

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540258

研究課題名(和文) 特異性を持つ形状最適設計問題及び破壊での変分理論構築と工学への応用に関する研究

研究課題名(英文) Construction of the theory of variation applicable to shape optimization problems and fracture, whose application to problems in engineering.

研究代表者

大塚 厚二(Ohtsuka, Kohji)

広島国際学院大学・総合教育センター・教授

研究者番号：30141683

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は次の3点である。(1)筆者の提案する一般J積分における主定理「エネルギーの特異点の摂動に関する変分は一般J積分で表現できる」が、幅広い非線形問題について成り立つことを木村教授と共に証明した。なお、本理論では境界も特異点の集合である。(2)一般J積分と畔上教授の提案するH1勾配法を組み合わせることで、混合境界値問題など特異性のある工学的環境下での形状最適化問題が解けることを理論と数値計算で示した。(3)偏微分境界値問題において、パリ第6大学のF.Hecht教授がリーダーとなっているFreeFem++が数理思考に基づく有限要素システムとして使えることを示した。

研究成果の概要(英文)：The results of research are the following. (1) In theory of generalized J-integral (GJ-integral), there is the result called Main Theorem, that is, the variation of energies with respect to the perturbation of the singular points is expressed as GJ-integral. In this research, it is proved that Main Theorem hold in wide nonlinear problems with Professor Kimura. (2) Combining GJ-integral and H1-gradient method proposed by Professor Azegami, we could show that the shape optimization problems with singularities are solved theoretically and numerically. (3) It was shown that FreeFem++ developed by Professor F. Hecht at the Laboratory Jacques-Louis Lions in Paris VI University is the finite element solver for boundary value problems by mathematical thinking and programming.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：変分法 形状最適化問題 特異性を持つ楕円型境界値問題 有限要素法 一般J積分 破壊現象 関数方程式 数理思考プログラミング

## 1. 研究開始当初の背景

破壊力学の数理で重要な概念であるエネルギー解放率を表現する J 積分を、3次元問題に適用するために筆者が 1981 年に一般 J 積分を提案した。さらに、1985 年の論文 “Generalized J-integral and its applications --Basic Theory--” (Japan J. Applied Math.2) で、種々の楕円型境界値問題・システムに対する形状感度解析での道具となる様に拡張し、統一理論を展開した。一般 J 積分理論で主定理と呼んでいるのが「エネルギーの特異点の摂動に関する変分は一般 J 積分で表現できる」である。なお、偏微分方程式を定義する領域の境界も「特異点の集合」として扱える。

理論では、たとえば、Dirichlet 境界と Neumann 境界といった混合境界値問題において、境界全体は法線方向に感度が高いのに対して接合部は接線方向に感度が高いといった性格の異なる特異点を同時に扱って、分離も可能な点にある。その後の研究は

- (1) 一般 J 積分の主定理をより広い枠組みで証明する
- (2) 一般 J 積分を形状最適化問題など工学における具体的な問題に適用できることを示す

といった 2 点に焦点を絞ってきた。最初の(1)については、ロシア Lavrentyev 研究所の A.Khludnev 教授と 2 本の共著論文 (2000,2002 年)において多少の進展を得たが、あまり大きな進展は得られなかった。さらに、(2)については理論的な可能性に留まっていた。

研究の主目的ではないが、筆者が主査を務めている日本応用数学会・研究部会「連続体力学の数理」において、長年、数学と工学といった異分野との協働をおこなってきた。しかし、工学での結果を数学的に正当化して一般化するだけでは、一般 J 積分の有効性が工学において認知されることはなかった。すなわち、異分野との研究交流においては、数理研究だけでなく、工学的に具体的な問題を数値計算して可視化を示す必要があると痛感している。そこで、数理研究・数値計算・可視化を継ぎ目なく結合できる研究支援環境が必要だと考えた。

数理研究を数値計算・可視化するツールとして数式処理システムが有名であるが、長方形領域などを除いて偏微分方程式境界値問題の解は数式で近似することも難しい。それに対して、変分法と密接に関係する有限要素法は実際の工業製品の設計に使われるなど汎用性が高い。残念ながら、有限要素法ツールの多くは、汎用プログラミング言語のライブラリとして提供されるか、ブラックボックス化されている。パリ第 6 大学 J.L.Lions 研究所の O.Pironneau 教授、F.Hecht 教授が開発してきた有限要素システム FreeFem++ は、数理研究のために開発しており、数理モデルを

数学的に記述することで境界値問題を解くことが可能となっている。筆者は、1995 年ごろから、FreeFem++ の前身である FreeFEM の開発等に関係し、最近ではマニュアル作成においてプロジェクトに参加している。

数学において異分野との協働が言われ、FreeFem++ プロジェクトも 3次元問題が解けるようになり、大規模計算への参入を考えている現在、FreeFem++ の数理研究での有効性を示すと共に自身の研究環境の整備などを含めて次を検討してきた。

- (3) 偏微分方程式境界値問題において、FreeFem++ が数理思考に基づく有限要素システムとして使えることを示す。

## 2. 研究の目的

背景にかかげた 3 つのテーマに分けて述べる。

### (1) 一般 J 積分の主定理

有限要素法での数値計算での妥当性を考えたとき、特異点の摂動を表す写像はリプシッツ連続であるといった弱い条件で証明しておく必要がある。また、破壊力学では J 積分が非線形問題で有効なことが特徴なので、主定理の証明を非線形問題に拡張しておくことは重要であった。Khludnev との共同研究においても証明方法は 1981 年の論文と本質的な違いは無かった。しかし、木村教授(分担者)は Banach 空間におけるパラメータ付汎関数のパラメータ微分に関する定理を作り、その定理を使って主定理を証明した。ただし、木村教授の研究では陰関数定理を使うため、非線形性の強い問題に適用できなかった。そこで、パラメータに関して強連続で唯一の最小値解を持ち、一様に強圧的で、パラメータがゼロのとき S+条件を満たす場合に、パラメータ微分が可能で主定理の抽象版が導けることを示した。その応用として p-ポアソン方程式について通常の主定理が成り立つことが証明できた。

研究の目的は、この結果を論文とし、工学における非線形現象を一般 J 積分の応用範囲に取り込むことである。

### (2) 形状最適化問題

一般 J 積分の出自は破壊力学であるが、形状感度解析にも適用可能であることを証明してきた。長年、形状最適化問題への適用ができなかった。畔上教授(分担者)が形状最適化問題で提案している H1 勾配法を使うことで最適形状を具体的に求めることが理論的に可能となった。H1 勾配法と一般 J 積分との組み合わせにより、従来は扱えなかった混合境界問題で記述される工学環境下での形状最適化問題が解ける可能性がでてきた。2 数学会 (2010 年春)に、円形領域におけるポアソン方程式混合境界問題について、エネルギーをコスト関数とする形状最適化問題を FreeFem++ を使って数値計算し、発表した。

ただし、数値計算における「面積一定」という制限がうまく実装されていなかった点、工学での数値計算例との比較が出来ていないなどの指摘を受けた。

そこで、畔上教授(分担者)には、形状最適化における制限を実現するためのラグランジュ乗数法と、その実装方法を教えていただく。先行研究としては、畔上教授による計算、そして G. Allaire 教授, O. Pantz 氏(フランス・エコールポリテクニク)による FreeFem++ を使った数値計算例

(<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/freefem.html>)があった。これらの数値計算においては、特異性を避ける工夫が必要となっていた。

本研究では、これらの先行研究と比較するため、同様な問題において固定部と応力自由部分をもつ工学的環境を特に仮定した最適形状を求める問題に本方法を適用することにした。手始めに、平均コンプライアンスをコスト関数とする形状最適化問題についてプログラムを完成する。

### (3) 有限要素法の数理思考プログラミング

従来から「学んだ数学を直接、プログラミング言語にできないか?」と考えていた。その意味で FreeFem++ に注目し、日本での講演を行ってきた。しかし、研究発表では、近似解を求める有限要素法では精度を避けて論じることはできない。そのため、単に変分法を知っているだけでは説得力のある数値計算結果と言えない。

そのため、有限要素法の理論と、その理論を反映できるプログラミング技術が必要となる。FreeFem++ には計算精度を高めるために、アダプティブメッシュ法や異なるメッシュでの補間機能などが備えられている。他にも移動メッシュなどもあり、それらの機能を使いこなすことは難しい。

数学と FreeFem++ でのプログラミングとを比較して使い方を解説する本を著したい。

## 3. 研究の方法

### (1) 一般 J 積分の主定理

木村教授との共同研究をまとめ、論文に著す。海外研究者から工学における非線形問題について情報を収集する。

### (2) 形状最適化問題

畔上教授から、工学における形状最適化問題を紹介してもらい、本理論を用いて解く。FreeFem++ で実装することを前提に、「体積一定」などの制約条件についてラグランジュ乗数法について畔上教授から教えていただき、プログラムを完成させる。

### (3) 有限要素法の数理思考プログラミング

FreeFem++ のリーダである F. Hecht 教授を招へいし、最新の動向を踏まえて

FreeFem++ の解説書を著す。

## 4. 研究成果

### (1) 一般 J 積分の主定理

木村教授と共著の論文 "Differentiability of potential energies with a parameter and shape sensitivity analysis for nonlinear case: the p-Poisson problem", Japan J. Indust. Appl. Math., Vol.29, No.1 を著した。

日本応用数学会・研究部会「連続体力学の数理」によるワークショップ CoMFoS11 (2011/10/8-10, 広島国際学院大学)において、A. Muntean(オランダ, Eindhoven University of Technology) がマイクロ構造における homogenization method, B. Bourdin(アメリカ, Louisiana State University) が破壊現象の変分法によるアプローチ(理論・数値計算法)を含む 17 件の講演があった。

CoMFoS13(2013/10/12-14, 金沢大学サテライト・プラザ)において、D. Knees 氏(ドイツ, ワイエルシュトラス研究所)による有限変形での破壊問題の変分的取扱いに関する研究を含め 16 件の講演があった。

### (2) 形状最適化問題

平均コンプライアンス問題について、種々の工学的問題を解くことができるようになった。研究結果は日本応用数学会、日本数学会などで発表した。

従来との違いは、固定部分と応力自由部分を動かすことが可能となったので、より広い問題を扱えるようになった。ただ、FreeFem++ の解説本に時間を取られ、論文にしていない。

### (3) 有限要素法の数理思考プログラミング

CoMFoS12(2012/10/6-8, 電気通信大学)において、F. Hecht 教授から FreeFem++ に関する最新の動向を教えていただいた。なお、CoMFoS13 では、13 件の講演があった。

共立出版から「有限要素法で学ぶ現象と数理 FreeFem++ 数理思考プログラミング」を高石教授(広島国際学院大学)との共著で 2014 年 2 月に出版した。本には、畔上教授との形状最適化に関する共同研究を FreeFem++ のソースコードと共に載せた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

M. Kimura, D. Tagami and S. Yazaki, Polygonal Hele - Shaw problem with surface tension, Interfaces and Free Boundaries, 査読有, Vol.15, 2013, pp.77-93.

K. Abe and M. Kimura,  
Vibration-fracture model for one  
dimensional spring-mass system,  
Journal of Math-for-Industry, 査読有,  
Vol.5 A, 2013, pp.25-32.

D. Murai and H. Azegami, Error  
analysis of H1 gradient method for  
shape-optimization problems of  
continua, JSIAM Letters, 査読有,  
Vol.5, 2013, pp. 29-32.

高石 武史・木村 正人, フェーズフィー  
ルド法による亀裂進展現象の数値モデ  
リング, 「科学・技術の研究課題への数  
学アプローチ 数学モデリングの基礎  
と展開」九州大学マス・フォア・インダ  
ストリ研究所 MI レクチャーノート, 査  
読無, Vol.46, 2013, pp.109-118.

大塚 厚二, Shape optimization for  
partial differential equations/system  
with mixed boundary conditions, 京都  
大学数理解析研究所講究録, 査読無,  
1791, 2012, pp.172-181.

K. Ohtsuka and M. Kimura,  
Differentiability of potential energies  
with a parameter and shape  
sensitivity analysis for nonlinear case:  
the p-Poisson problem, Japan J.  
Indust. Appl. Math., 査読有, Vol.29,  
2012, pp.23-35.

M. Benes, S. Yazaki and M. Kimura,  
Computational studies of non-local  
anisotropic Allen-Cahn equation,  
Math. Bohem, 査読有, Vol.136, 2011,  
pp.429-437.

M. Kimura and I. Wakano, Shape  
derivative of potential energy and  
energy release rate in fracture  
mechanics, Journal of  
Math-for-Industry, 査読有, Vol.3 A,  
2011, pp.21-31.

M. Kimura and T. Takaishi, Phase  
field models for crack propagation.  
Theoretical and Applied Mechanics  
Japan, 査読有, Vol.59, 2011, pp.85-90.  
片峯 英次・吉岡 広起・松浦 浩佑・畔上 秀幸, 平均コンプライアンス最小化  
を目的とした熱弾性場の形状最適化, 日  
本機械学会論文集 B 編, 査読有, Vol.77,  
2011, pp.4015-4023.

D. Murai and H. Azegami, Error  
analysis of H1 gradient method for  
topology optimization problems of  
continua, JSIAM Letters, 査読有,  
Vol.3, 2011, pp.73-76.

[学会発表](計 25 件)

大塚 厚二, 一般 J 積分を使った最適形  
状設計, 日本数学会年会 (2014/3/18, 学  
習院大学)

大塚 厚二, 破壊における数値モデルの

諸問題, CoMFoS13 (2013/10/14, 金沢  
大学サテライト・プラザ)

木村 正人, 不可逆拡散方程式と亀裂進  
展モデル, CoMFoS13 (2013/10/13, 金  
沢大学サテライト・プラザ)

畔上 秀幸・新谷 浩平, 大変形後の釣り  
合い状態における固有振動問題に対す  
る形状最適化, CoMFoS13 (2013/10/13,  
金沢大学サテライト・プラザ)

畔上 秀幸・新谷 浩平, 勾配の無限大ノ  
ルムを評価関数にした形状最適化問題  
の構成法, 日本応用数理学会年会  
(2013/9/11, アクロス福岡)

木村 正人, 亀裂進展現象のエネルギー  
変分的数値モデリングの基礎と展開, 日  
本応用数理学会年会(招待講演,  
2013/9/11, アクロス福岡)

大塚 厚二, 一般 J 積分の数値計算と応  
用, 日本応用数理学会年会 (2013/9/11,  
アクロス福岡)

木村 正人, 不可逆拡散方程式とその亀  
裂進展モデルへの応用, 第 5 回福島応用  
数学研究集会 (2013/3/1, コラッセふく  
しま)

木村 正人, 亀裂進展数値モデル構築と  
その数学解析の試み, 第 77 回現象数理  
セミナー (2013/2/22, 九州大学数理  
IMI 棟)

木村 正人, パネ・ブロックモデルによ  
る弾性体の近似について, 研究部会「連  
続体力学の数理」ワークショップ「連続  
体力学の現象と数理 III」(2013/2/18, 九  
州大学西新プラザ)

木村 正人, 亀裂進展・破壊現象の数値  
モデリング, IMI チューロリアル「数理  
モデリングの基礎と展開」(2013/2/21,  
九州大学稲森ホール)

木村 正人, 不可逆拡散系の数学解析と  
亀裂進展モデルへの応用, 北陸応用数理  
研究会 2013 (2013/2/13, 金沢大学サテ  
ライト・プラザ)

畔上 秀幸, 一般 J 積分を用いた特異点  
に対する形状微分の評価について, 日本  
応用数理学会 2013 年研究部会連合発表  
会 (2013/3/14, 東洋大学白山キャンパ  
ス)

畔上 秀幸, 形状最適化問題における特  
異点まわりの形状微分について, 研究部  
会「連続体力学の数理」ワークショップ  
「連続体力学の現象と数理 III」  
(2013/2/19, 九州大学西新プラザ)

大塚 厚二, FreeFem++による最適形状  
設計問題の解法, 日本応用数理学会 2013  
年研究部会連合発表会 (2013/3/13, 東  
洋大学白山キャンパス)

大塚 厚二, 非貫通条件と摩擦を考慮し  
た破壊の数値と諸問題, 研究部会「連続  
体力学の数理」ワークショップ「連続体  
力学の現象と数理 III」(2013/2/19, 九州  
大学西新プラザ)

大塚 厚二, FreeFem++を使った最適形状設計問題の解法, CoMFoS12

(2012/10/8, 電気通信大学)

畔上 秀幸, 抽象的最適設計問題に基づく形状最適化問題の定式化, CoMFoS12 (2012/10/7, 電気通信大学)

大塚 厚二, 最近の FreeFem++, 日本応用数学会年会(2012/8/29, 稚内全日空ホテル)

K. Ohtsuka, Application of GJ-integral to shape optimization problems for partial differential equation/system with mixed boundary conditions, the 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (2012/8/20, 北京, 中国)

⑳ H.Azegami, Shape optimization for boundary value problems of PDE and its application to mechanical design, 招待講演, ESF-JSPS Frontier Science Conference, Series for Young Researchers, Mathematics for Innovation: Large and Complex Systems, (2012/2,28, The Four Seasons Hotel Tokyo at Chinzan-so, 東京, 日本)

㉑ 畔上 秀幸, 形状最適化問題に対する H1 勾配法の見直し, 日本応用数学会年会 (2011/9/16, 同志社大学)

㉒ 大塚 厚二, 混合境界条件における形状最適設計問題の解法, 京都大学数理解析研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」(2011/10/27)

㉓ K. Ohtsuka, Theory of GJ-integral and its application for shape optimization, CoMFoS11 (2011/10/9, 広島国際学院大学袋町キャンパス)

㉔ 大塚 厚二, 特異性をもつ形状最適設計問題での変分理論, 日本数学会(2011/9/28, 信州大学)

〔図書〕(計2件)

大塚 厚二・高石 武史, 有限要素法で学ぶ現象と数理 FreeFem++数理思考プログラミング, 共立出版, 2014/2, pp.1-151, pp.195-240

大塚 厚二, 応用数学会編 応用数理ハンドブック, 朝倉書店, 2013/11, pp.86-91, pp.96-99

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

日本応用数学会・研究部会「連続体力学の数理」公式サイト <http://comfos.org>  
個人サイト <http://otlab.jp>

6. 研究組織

(1)研究代表者

大塚 厚二 (OHTSUKA KOHJI)

研究者番号: 30141683

(2)研究分担者

畔上 秀幸 (AZEGAMI HIDEYUKI)

研究者番号: 70175876

木村 正人 (KIMURA MASATO)

研究者番号: 70263358