2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2014
課題番号：２３６５４０２１
研究課題名（和文）有界領域の値分布論

研究課題名（英文）Value distribution theory of bounded domains

研究代表者
宮岡　礼子（Miyaoka, Reiko）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０１０８１８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：代数的極小曲面のガウス写像の除外値及び全分岐値数の評価の新しい手法に取り組み１．基本領域上でのガウス写像の次数と曲面の位相量の比Rという不変量を発見し，周期条件を反映すると，Rが１より真に大きくなることがわかり，全分岐値数に対する最良の結果を得た．除外値数の評価には至っていない．２．そこで普遍被覆曲面を考え，円板上のネバンリンナ理論の開発に挑戦した．二つの大きな問題の一つ目であるコーンフォッセン不等式の評価につながる量κの評価を行い，候補数を見出した．３．極小曲面の特殊性からガウス写像のジェット空間での接近関数，個数関数を考え，対数微分の補題を適用することにより，次のステップに進んだ．

研究成果の概要（英文）：Through a challenge to estimate the number of exceptional values as well as the total ramified value numbers of the Gauss map of algebraic minimal surfaces, we obtain the following: 1.We found an invariant R given by the ratio of the degree of the Gauss map and a topological quantity, and taking the period condition into account, we have an estimate of the total ramified value number, although the maximal number of the exceptional values is not yet obtained. 2. Lifting all the data to the universal covering (disk) of the surface, we found a candidate of the key number κ, which is somehow corresponds to R above. 3. Using the special properties of minimal surfaces, we consider 1-jet space of the Gauss map to which we apply a new Nevanlinna theory. On the jet space, we consider the proximity function, the counting function and try to use the lemma on logarithmic differential to obtain the final defect relation.

研究分野：微分幾何学

キーワード：代数的極小曲面　全曲率有限　ガウス写像　除外値　全分岐値数　ネバンリンナ理論　コーンフォッセンの不等式　対数微分の補題

1. 研究開始当初の背景：1994年の論文”***On a complete minimal surface whose Gauss map misses two points***, Archiv der Mathematik, 63 (1994) 565-576 (R. Miyaoka and K. Sato)において，代数的極小曲面のガウス写像の除外値数が２の例を，ほとんどすべての位相型で実現した．それまで知られていた例はカテノイドというごく限られたものであった．しかし除外値数３のものが存在するか否かは大きな未解決問題で，その取り組みには時間を要している． その後，基本領域における代数的議論により，ある不変量を発見し，これを用いることによりOssermanの従来の結果に加え，未知であった全分岐値数の評価を得て，本研究課題へのきっかけとなる主要論文 “The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces”, Forum Mathematicum 20 (2008) 1055-1069 (Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka)を発表している．

２．研究の目的：代数的極小曲面のガウス写像の除外値数と全分岐値数の最良評価を与える．

３．研究の方法：基本領域における代数的考察と，普遍被覆面における，基本群作用を考慮した値分布論の展開の両面から取り組む．

４．研究成果：現在まだ発表段階にある成果はない．プレプリントとして ”Nebvanlinna-Galois theory for algebraic and pseudo-algebraic minimal surfaces -Value distribution of the Gauss map” (R. Kobayashi and R. Miyaoka) 113 ページ (2015) がある．H26-28 年度の挑戦的萌芽研究「幾何学的値分布論」で引き続き研究を行っているが，以下に当研究課題に関する研究の現状を記す．

１に述べた研究では基本領域の面積をガウス写像の引き戻しによる特異 Fubini-Study 計量で計った A(FS)と，オイラー数の絶対値で与えられる，双曲計量で計った A(hyp)との比 R が重要な役割を果たしている．全分岐値数という除外値数よりも精密な数 ν は上から 2+2/R でおさえられ，かつ周期条件から R>1 がわかるので，結局 ν<4 を得て，代数的極小曲面のガウス写像の除外値数が３以下であること，さらに全分岐値数が４より小さい数でおさえられることがわかった．また，宮岡-佐藤曲面で ν=2.5 を与えるものが存在するので，全分岐値数は整数になるとは限らず，従って除外値数の評価とは異なる評価が必要なことが新たにわかっている．以上のことを踏まえ，極小曲面個別の評価でなく，種数や穴の数に寄らない評価を与えるため，すべてのデータを普遍被覆面上にリフトすることにより，除外値数の最終評価に挑戦している． すなわち，基本領域上の二つの計量，Fubini-Study 計量及び双曲計量による面積比 R の評価を発展させ，普遍被覆面でガウス写像の像の面積双曲円板の面積増大度を比較する集団的 Cohn-Vossen 不等式に取り組み，その評価の候補値を得た．これを用いて，ガウス写像の１ジェットに対数微分の補題を適用し，そこから Nevanlinna の第２主要定理に至る過程と，最後の段階で周期条件を用いる議論を構築しつつある．

この方法は，すべての種数と穴の数を一斉に扱うため，普遍被覆面に議論を移し，基本群の作用のもとでの考察を要している．集団的 Cohn-Vossen の不等式を出すための円板の半径増加に対する高さ関数（特性関数）の評価には大きな困難が現れる．ここは放物型変換で変形する基本領域のカスプ切断の面積増大度を，Fubini-Study と双曲計量の両方で評価しなければならず，双曲等長変換とユークリッド等長変換の相性の悪さから，最終的には中心極限定理に頼らねばならないところが出てきてしまう．現在この難関はある程度まで克服できているが，局所化の起こる穴の周囲では曲面の局所座標と円板の座標による計算量の比較が必要となり，この辺りの議論の正当化と見通しは必ずしも理解しやすいものではない．できればすべての種数，穴の数ではなく，有限の種数，穴の数まで議論を落とせることなど別法で示した上で，こうした評価につなげるのが筋であると思っている．なんらかの単調性などを用いて，有限の話に持ち込めればこの方法も使えるかしれない．

実際，除外値数３が起きるとすると，これはかなり対称性の高い曲面で，種数や穴の数が大きい複雑な曲面では直感的には起きづらい．単純な場合，例えば宮岡-佐藤曲面の場合には，基本領域と基本群の作用が具体的に書けるから，評価が目に見える．他にもトーラスから３点を抜いた領域など，具体的な計算が可能な例はいくらでもある．したがってこのような単純な場合への帰着を許すなんらかの議論ができれば，この手法の信憑性は高まる．

他方，この手法の動機には，こうした個別の評価ではなく，一斉の評価を行うという壮大な理論構築もあったので，基本領域の議論に落ちるような手法はその点では逆方向であり，研究の指針をどこに据えるか難しい面がある．

この集団的 Cohn-Vossen 不等式の部分が片付いた後で用いる，対数微分の補題は一

つの不等式を二つの不等式に分解するというアイディアで，いわば情報を倍加して用いることができ，Nevanlinnna の第２種用定理に近づくことができる．ここは古典論とさほど隔絶した議論は不要であるが，途中では無限大<無限大のような評価も現れるので緻密な議論が必要である．

最後の難関が周期条件の扱いである．極小曲面の Weierstrass 表現に現れるサイクルにそう積分には実周期がないことから，これを指数関数の肩にのせると，絶対値が一定の複素数関数が得られ，この関数の高さ関数に，またここまでの議論が使える状況であることが確認される．これにより，Nevanlinna 理論の第２主要定理からディフェクトを求めることにより，代数的という条件がきいて，除外値は２以下，全分岐値数は 2.8 より小さい，という結果が得られるというストーリーができる．擬代数的極小曲面については，周期条件がないのでこの議論はできず，藤本の定理である除外値数は高々４という結果が得られる．
以上の草稿は１００ページを超えていて，どの部分も通常の数学の議論になるかどうかこの時点では不明である．しかしこれを乗り切れば，新たに円板上の Nebanlinna 理論という手法が得られ，極小曲面以外の幾何や解析にインパクトを与えることはまちがいない．

最近新たな取り組みとして，複素関数論的議論ではなく，調和写像的観点から，次のことを考えている．代数的極小曲面のガウス写像の除外値数は高々２であろうというのが大方の予想であるので，これが３であると仮定する．すると，像は P^1-{３点}となるので，ここには双曲計量 τ が入る．ガウス写像 g は P^1-{３点}への分岐被覆であるから，特に連続写像である．さて調和写像の理論は Eells-Sampson の定理から進展して，非コンパクト，完備な曲面からの連続写像がエネルギー有限であれば，行き先が負曲率の場合，そのホモトピー類の中に調和写像が存在するというその非コンパクト版がある．従って今，極小曲面 M から P^1-{３点}への調和写像 h で g とホモトピックなものができる．他方，曲面からの調和写像は，曲面の共形構造のみによって決まり，計量にはよらない．従って M は双曲型であることに注意すると，M にも双曲計量 σ が入る．
すなわち，共に負曲率-1 の曲面(M,σ)から（P^1-{３点},τ）への調和写像ができたことになる．曲面の間の調和写像についてはそのエネルギー密度のラプラシアンや，付随する正則２次微分とその零点などに関する詳細な議論があるので，これらをうまく適用することにより，３点除外の仮定に矛盾が起きるのではないかと考えている．
実際，M の元の計量による曲率も双曲計量も下に有界であり（ここで M が代数的であることを使っている），この条件はいろいろな解析をする上で非常に都合が良い．
例えば，正のリッチ曲率を持つコンパクト多様体から，負曲率空間への調和写像は定値写像しかないことはよく知られている．このように，ソースの曲率がターゲットの曲率より大きい時は調和写像は限定的になる．したがって上の調和写像が非常に限定的であることが示せれば，矛盾が導かれる可能性がある．

このようにして，新たな手法で取り組む可能性がでてきた．他方，全分岐値数に関する情報をどのように入れるかはまだわからない．複素関数論的議論ではリーマン-ロッホやリーマン-フルウィッツで分岐値数の評価が可能であったが，調和写像論でこれを行うにはおそらく正則２次微分を使うことになろう．何れにせよ，除外値問題に調和写像論を導入した例はなく，挑戦的萌芽研究の次の課題としてぜひ取り組みたいと考えている．

従って今後は普遍被覆面上の Nevanlinna 理論と並行して，基本領域上での調和関数論に取り組んでいき，双方の情報をあわせることにより，最終結果につなげるつもりである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計２件）

1. 小 林 亮 一 ”Geometry of Parabolic Localization, Metrization of Osserman’s Theory, and Nevanlinna-Galois Theory of the Gauss Map of Algebraic Minimal Surfaces, Geometry and Analysis 査読無(福岡大学)(2014), 73-86.

2. 宮岡礼子「複素数で表す極小曲面」数理科学 査読有 2.10 (2014) 14-20.

〔学会発表〕（計３件）

1. 宮岡礼子「代数的極小曲面のガウス写像の除外値数について」複素解析セミナー(東北大学情報科学研究科) 2014.11.19.

２．小林亮一「極小曲面のガウス写像の除外値に対する Osserman 理論の計量化の試み」大岡山談話会（東工大）2014.7.16.

３．小林亮一「Localization via parabolic translation and collective Cohn-Vossen inequality」5th International Workshop in Defferential Geometry （唐津）2014.6.4.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者　宮岡　礼子
東北大学・大学院理学研究科・教授
（Reiko Miyaoka）

研究者番号：70108182

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

研究協力者　小林　亮一
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
（Ryoichi Kobayashi）

研究者番号：20162034