様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ２２ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０５３
研究課題名（和文）ヒルベルト空間の部分空間の配置と作用素の研究

研究課題名（英文）Research on the relative position of subspaces of a Hilbert space and operators

研究代表者
綿谷 安男（Watatani, Yasuo）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：００１７５０７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円、（間接経費）　810,000円

研究成果の概要（和文）： 大きなヒルベルト空間に含まれる小さい部分空間の相対的な位置関係を研究した。それもn個の部分空間の配置を考えた。重要なのは直和に分解できない直既約な配置である。n=1,2の時はすでに解けているが、有限次元に限れば、n=3,4の場合も完全に分類されている。しかし、無限次元だとn=3や4の場合すら未解決である。
今回の研究はこの問題を線形作用素の研究との類似を考察するという新しいアイデアで攻略した。さらにquiver（有向グラフ）の頂点をヒルベルト空間に、辺を線形作用素に対応させるヒルベルト表現の理論を開始した。拡大ディンキン図形に対してその無限次元直既約ヒルベルト表現の存在を証明した。

研究成果の概要（英文）： We study the relative position of n subspaces of a Hilbert space. It is important to consider indecomposable position. The case of n =1 and n =2 are solved. In finite dimensional Hilbert space, the case of n =3 and n =4 are solved and the indecomposable n subspaces are completely classified. But infinite dimensional Hilbert space, even the case of n =3 and n =4 are still unsolved.
In our study, we attacked it by considering an analog of operator theory. We began to study Hilbert representations of quivers, which associate Hilbert spaces and operators for vertices and arrows of quivers. We investigate a complement in an infinite dimensional Hilbert space for Gabriel theorem using Dynkin diagrams A, D and E. We show that there exist infinite dimensional indecomposable Hilbert representations for extended Dynkin diagrams.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 関数解析　ヒルベルト空間　部分空間の配置　直既約　拡大ディンキン図形

１．研究開始当初の背景

研究代表者は1980年にMemoir of American Math. Soc.で発表した論文で、C*-環に対するJonesの指数理論を研究していた。そのときに大きい C*-環に含まれる小さい C*-環の指数を定義しK-理論で記述するなどして、相対的な位置関係の研究を行なった。その研究の過程で、大きい数学的対象に含まれる小さい数学的対象の相対位置の研究の重要性と豊かさに気づかされた。そうしているうちに、作用素の作る環ではなく、無限次元ヒルベルト空間に包含される部分空間の位置関係が二つの部分空間の角度以外にまともに研究されていないことに気がついた。よく調べてみると有限次元のベクトル空間の時にはGelfand と Ponomarev による４個までの部分空間の配置の完全分類があることを知った。しかし無限次元のヒルベルト空間のn個の部分空間の配置については、二つの部分空間の間の角度の考察が確立されているだけで、長い間ほとんど何も知られていなかった。しかし私は榎本氏と共同研究を行い、無限次元ヒルベルト空間の４個の部分空間の既約な配置を非可算無限個構成し、ここにも豊富な構造が存在することを示し、この状況を突破した。

２．研究の目的

大きなヒルベルト空間Mに含まれる小さい部分空間の相対的な位置関係を研究する。それも n 個の部分空間 $N_1,\cdots,N_n$ の配置を解明するのが目的である。重要なのは直和に分解できない直既約な配置である。n=1,2の時はすでに解けているが、有限次元に限れば、n=3,4 の場合も完全に分類されている。しかし、無限次元だとn=3や4の場合すら未解決である。今回の研究はこの問題を線形作用素の研究との類似を考察するという新しいアイデアで攻略するのが目的である。これにより作用素の不変部分空間の問題との強い連関も描ける。さらにquiver（有向グラフ）の頂点をヒルベルト空間に、辺を線形作用素に対応させて、道環の表現論としての研究にまで一般化する。これによりディンキン図形のA,D,E を使ったガブリエルの定理の無限次元版の研究も目指す。

３．研究の方法

全体としての大きな数学的対象Mに含まれる小さな対象Nの相対的な位置関係の研究は実に豊富である。例えば体Nの拡大体Mの様子を調べるガロワ理論や大きな作用素環Mのなかにはいっている小さな部分作用素環Nの相対的な位置関係を研究するJonesの指数理論がその典型である。また単位円周 $N=S^1$ の 3 次元空間 $M= R^3$ への埋め込みである結び目の研究も相対的な位置関係の豊富さを例証している。これらからアイデアを得て、特に直和に分解できない直既約な配置を研究する。今回の研究はこの問題を線形作用素の研究との類似を考察するという新しいアイデアで攻略する。quiver（有向グラフ）の頂点をヒルベルト空間に、辺を線形作用素に対応させて、作用素論という関数解析の道具で無限次元の困難を乗り越える。

関数解析を知っている人は、ヒルベルト空間の幾何なんてもうなにもやることはないはずと思うかもしれないが、部分空間の配置の研究という意外な盲点に着目できた。現在の状況は夜明け前の全くの暗闇の世界なので、イメージをつかむことがよき研究方法をつくることに結びつく。行列のジョルダン標準形を含む有限次元の時の直既約な配置を絵にして描きながら、その無限次元版を考える。4 つの部分空間の配置は作用素論をある意味では含むので、作用素論をすべて部分空間の配置の言葉で翻訳してその類似を考察するともに、そこに表れない配置特有の現象を見出す。また無限次元ヒルベルト空間版を研究するのは、有限次元リー環を Kac-Moody 環へ拡張したときと同様に広大な研究分野を開拓することに相当するので、その方法論も学び研究を進める。無限次元の空間も有限次元の空間の帰納的極限でかける場合を糸口とする方法を推し進めたい。

全体空間Mが有限次元のときに３つの部分空間の直既約な配置は９種類しかないのに４つの部分空間の直既約な配置は無限種類ある。この３つと４つの間に横たわる謎は、３つの部分空間 $N_1,N_2,N_3 \subset M$ と４つの部分空間 $N_1,N_2,N_3,N_4 \subset M$ の包含関係を埋め込み写像と思い直すことから、解けてくる。ここで部分空間を頂点に対応させ、包含写像を辺に対応させた有向グラフ（quiver）を考えると、３つの部分空間の配置はディンキン図形の D_4 になり、４つの部分空間の配置は拡大ディンキン図形の D_4~になる。このことを鍵として研究方法を構想してみた。有向グラフ(quiver)の頂点をヒルベルト空間に、辺をその間の作用素として表すヒルベルト表現を主に研究した。quiverの直既約のヒルベルト表現構成と特別なクラスに対する分類を試みた。さらに道環(path algebra)の表現論という形で理論を整理し構築した。

quiverの有限次元の表現についてGabrielの定理が有名である。それは有限次元の直既約表現が有限個に限られる quiver は、向き付けによらず次のディンキン図形の An, Dn,E6,E7,E8 に限られることをいっている。このままでは有限次元空間だけの話であるが、対偶をとった命題を考えると拡大ディンキン図形を含めば有限次元の直既約表現が無限個あることになる。そこでもしその中にうまく帰納的極限をとれるような増大列が含まれれば、無限次元の直既約表現がうまく構成できる期待がでてくる。こういう風に視点を逆転させると、Gabriel の定理の補集合的命題として、無限次元直既約表現の存在問題が浮上してくる。そこで、quiverの有限次元の表現の帰納的極限で作られる表現の研

究を計画している。これは作用素環における AF 環（Approximately finite dimensional algebra）の類似物である。そこでブラッテリ図式をまねて、帰納的極限の様子を絵で描くことができるであろう。最終的にほしいのは、帰納的極限として構成される表現がいつ直既約になるかの十分条件をみつけることであるが、これも AF 環の単純性としてブラッテリ図式から読み取れることのまねができるのではないかと狙ってやったがまだ未解決のままである。ヒルベルト空間上Ｋ上の作用素Ｔがあるとそれから標準的に H=K⊕K の４つの部分空間の配置がつくれるがそれを拡大ディンキン図形の D_4~の表現と見做した時、もし、作用素Ｔが quasi-subdiagonal であれば有限次元表現の帰納的極限と思える。その意味で、作用素論の知られた構成との関連もつけられるのでないかと考えたが、難しかった。さらにディンキン図形はリー環の分類や特異点の分類理論にも現れる。それらとディンキン図形のヒルベルト空間上への表現は底流で関連している。その相互関係を見つけるために、特異点論の研究も行った。

Gabriel の定理を発展させ,quiver の代わりに quiver 上の道環（path algebra）の表現を考えて一般することができる。多元環の表現論の研究は、代数の立場による研究なので、それをそのまま無限次元に引き写すことは困難であるが、その骨格の議論は無限次元でも何らかの形で生き残るはずである。それを道環の表現論を群の表現論との類似として展開してみた。そのためには群 C*-環に対応するような道 C*-環のようなものも導入したが。quiver の形によれば、非有界な作用素を考察する必要もあった。４つの部分空間の配置の時はその数値的不変量として、defect を導入することができた。それは Fredholm 作用素の指数を使っている。そこで quiver 一般に対しても道環のＫ群に値をもつ量をつかって defect を導入することを試みたがまだうまくいっていない。

４．研究成果

大きなヒルベルト空間に含まれる小さい部分空間の相対的な位置関係を研究した。それも n 個の部分空間の配置を考えた。重要なのは直和に分解できない直既約な配置である。n=1,2 の時はすでに解けているが、有限次元に限れば、n=3,4 の場合も完全に分類されている。しかし、無限次元だと n=3 や 4 の場合すら未解決である。今回の研究はこの問題を線形作用素の研究との類似を考察するという新しいアイデアで攻略した。さらに quiver（有向グラフ）の頂点をヒルベルト空間に、辺を線形作用素に対応させるヒルベルト表現の理論を開始した。これによりディンキン図形の A,D,E を使ったガブリエルの定理の無限次元空間での補間を考察した。拡大ディンキン図形に対してその無限次元直既約ヒルベルト表現の存在を証明した。さらに Qronecker quiver を研究し、その場合にはもっと強い性質をもつ無限次元遷移表現の存在を証明した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　７　件）

① N. Nawata and Y. Watatani, Fundamental group of simple C*-algebras with unique trace II, J. Funct. Anal. 260 (2011), 428-435. 査読あり．

②T.Kajiwara and Y.Watatani C*-algebras associated with algebraic correspondences on the Riemann sphere, J. Operator Theory 65 (2011), 427-449. 査読あり．

③T. Kajiwara and Y.Watatani, KMS states on finite graph C*-algebras, Kyushu J. Math. 67 (2013), 83-104. 査読あり．

④T.Kajiwara and Y. Watatani, C*-algebras associated with complex dynamical systems and backward orbit structure, Complex anal. Oper. Theory 8 (2014), 243-254. 査読あり．

⑤ T. Kajiwara and Y. Watatani, Traces on cores of C*-algebras associated with self-similar maps, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems. 査読あり．

⑥S. Ino and Y. Watatani, Perturbations of intermediate C*-subalgebras for simple C*-algebras, to appear in Bull. Lond. Math. Soc. 査読あり．

⑦M. Enomoto, A construction on Hilbert representations of quivers, to appear in RIMS Kokyuroku.

〔学会発表〕（計　3　件）

①綿谷安男，複素力学系から作られる C*-環とそのコア，作用素論作用素環論研究集会，東京理科大，2010 年 11 月．

②Y. Watatani C*-algebras generated by two operations, MFO, Oberwolfach, Germany, April, 2012.

③綿谷安男 Singularities in operator algebras，日本数学会年会，学習院大学，2014 年 3 月．

その他、春と秋の日本数学会でほぼ毎回発表した。

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：

権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　綿谷　安男（Watatani Yasuo　　）
　九州大学・大学院数理学研究院
　研究者番号：00175077

(2)研究分担者
　　　　　（　　）
研究者番号：

(3)連携研究者
　榎本　雅俊　（Enomoto Masatoshi　）
　甲子園大学・総合教育研究機構
　研究者番号：70185130