

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 28 日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2011～2014

課題番号：23684004

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式における時空間評価と初期値境界値問題の研究

研究課題名(英文)Research on initial and boundary value problems, and space-time estimates for nonlinear partial differential equations

研究代表者

中村 誠(Nakamura, Makoto)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：70312634

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 10,800,000円

研究成果の概要(和文): Lindblad と Rodnianski による時空間評価を一般化し、零条件を満たす非線形項を持つ三次元波動方程式系の初期値問題を考察した。微分型非線形項を持つ熱方程式の初期値問題をベゾフ空間とトリーベル・リゾルキン空間を用いて考察した。ド・ジッター時空において非線形クライン・ゴルドン方程式、および、その非相対論的極限として得られるシュレディンガー方程式のエネルギー解を構成した。特異性のある重みを持つルベグ空間において Moser-Trudinger 不等式の最良定数を示し、指数関数型非線形項を持つクライン・ゴルドン方程式の初期値問題へ応用した。

研究成果の概要(英文): The space-time estimates by Lindblad and Rodnianski were generalized, and the initial value problem was considered for the system of wave equations with nonlinear terms which satisfy the null conditions in three spatial dimensions. The initial value problem was considered for heat equations with derivative nonlinear terms in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces. The energy solutions of the initial value problem were constructed for nonlinear Klein-Gordon equations in the de Sitter space-time, and nonlinear Schrödinger equations derived by its nonrelativistic limit. The best constant of the Moser-Trudinger inequality was shown in Lebesgue spaces with a weight which has a singularity, and it is applied to the initial value problem for nonlinear Klein-Gordon equations with nonlinear terms of exponential type.

研究分野：関数方程式論

キーワード：偏微分方程式 非線形 初期値問題 境界値問題

1. 研究開始当初の背景

次の(A)から(E)までの各背景を基に研究課題を設定した。(A) Keel, Smith, Sogge が示した時空間評価(以下、KSS 評価と書く)は、非線形波動方程式の初期値問題への応用において大域解と長時間解を与え、長時間解の存在時間も正確に求まるという点で画期的であり、Sogge と Metcalfe を中心として活発に研究されている。(B) アインシュタイン方程式の大域解の研究は Christodoulou, Klainerman に始まり Lindblad, Rodnianski の研究に至って開拓的な進展が見られ、波動方程式論に基づいて大域解の存在が示された。(C) 非線形偏微分方程式の物理的応用では空間に障害物があり、その外側で初期値問題を解くという外部問題であることも多い。非線形波動方程式の外部問題については KSS 評価を使った Metcalfe, Sogge による大域解と長時間解についての研究以降、彼等を中心に大きな進展を見せている。(D) 代表者はべき乗型非線形項を持つ波動方程式と分散型方程式に対して H^s 理論と呼ばれるソボレフ空間における初期値問題の統一的解法を示した。 H^s 理論の一部である指数関数型非線形項についての理論は代表者らによって初めて示され、現在では Ibrahim と Masmoudi を中心として境界値問題も扱われている。(E) クーロンポテンシャルや逆二乗型ポテンシャルは特異性のある重みの付いた非線形項として一般化される。この非線形項を持つ偏微分方程式の初期値問題を考察するには Moser-Trudinger 不等式などの拡張が必要になる。

2. 研究の目的

次の各課題を設定し、その解決に取り組んだ。(A) 波動方程式と分散型方程式の時空間評価を研究し、非線形方程式の初期値問題へ応用する。KSS 評価の更なる整備と一般化を行う。(B) アインシュタイン方程式に関連する曲空間における計量を考察し、その計量の下で非線形波動方程式の初期値問題に取り組む。(C) 非線形波動方程式と非線形分散型方程式の外部問題における KSS 評価を構成すると共に、長時間解および大域解を構成する。(D) べき乗型非線形項を持つ複素ギンツバーグ・ランダウ方程式を中心に、低次ソボレフ空間での大域解と長時間解の存在証明に取り組む。(E) 特異性のある重みの付いた非線形項を持つクライン・ゴルドン方程式とディラック方程式の初期値問題の適切性理論を構成する。

3. 研究の方法

(A) 波動方程式については Du, Zhou による時空間評価を含んだ形で KSS 評価の拡張を行う。分散型方程式については Kenig, Ponce, Vega による評価を出発点として対数型の補正項が付いた時空間評価を構成する。(B) 曲空間における KSS 評価の構成を目指した

Alinhac の結果は、解の空間減衰に強い仮定が必要であり、非線形問題において長時間解を扱うのが難しいため、エネルギー法におけるモーメントの改良により、KSS 評価を構成する。(C) 波動方程式の解に対する Lindblad の各点評価はローレンツブーストを使用するため伝播速度の異なる波を扱うのが難しいが、この困難を KSS 型評価と回転微分作用素と Klainerman-Sobolev 不等式の使用により克服を試みる。また、非線形項が発散形式の場合に波動方程式の持つ微分位相構造の違いを用いて解の存在を示す。(D) 指数関数型非線形項の評価について、ソボレフの埋蔵定理の破綻を克服するために、二重対数型不等式を用いて未知関数のルベグノルムをヘルダー連続性により制御する方法を考察する。(E) 特異性のある重み付き非線形項を扱うために、Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式を用いた初期値問題の適切性理論を構成する。

4. 研究成果

以下、(1) などの数字は下記〔雑誌論文〕における数字に対応する。

(1) Lindblad と Rodnianski による重み付きエネルギー評価を一般化して、標準的零条件を満たす非線形項を持つ三次元波動方程式系の初期値問題における時間大域解の存在定理を示した。全空間での存在定理は Sideris, Tu (2001) により示され、外部問題での存在定理は Metcalfe, Sogge (2005) により示されているが、それらの簡易な別証明を示した。

(2) 微分型非線形項を持つ熱方程式の初期値問題をベゾフ空間とトリール・リゾルキン空間を用いて考察し、尺度不変性の議論に基づいて小さい時間大域解の存在を示した。ナビエ・ストークス方程式とケラー・ジーゲル方程式に応用し、初期値問題の大域適切性を考察した。

(3) 非線形波動方程式の初期値問題を空間一次元において考察した。非線形項の零条件を光錐に沿った接微分を用いて考察し、非線形項の接微分の指数に応じて、非線形波動方程式の解の存在時間を評価した。応用として、零条件を満たす非線形波動方程式の存在時間を考察した。

(4) ド・ジッター計量を持つ空間における非線形クライン・ゴルドン方程式の初期値問題におけるエネルギー解を考察した。非線形項は冪乗型、および、指数関数型のものを考察した。Yagdjian (2012) による先行結果はエネルギー解、および、1次元空間を扱えないものであったが、本論文では両方ともに扱える。空間膨張による消散効果をエネルギー評価の観点で明示した。

(5) 特異性のある重みを持つルベグ空間において Moser-Trudinger の不等式の最良定数を考察した。更に、最良定数を持つ不等式が成り立つ最小化関数の存在も示した。また、

最良定数を持つ Gagliardo-Nirenberg 型不等式も示した。

(6)特異性のある重みを持つルベグ空間において Moser-Trudinger 不等式の最良定数を考察した。応用として指数関数型非線形項を持つクライン・ゴールドン方程式の初期値問題を考察し、エネルギークラスでの時間局所解、および、保存則が成り立つ場合の時間大域解の存在を示した。

(7)原点において特異性のある非線形項を持つ消散型波動方程式の初期値問題を考察し、エネルギークラスで時間局所解と小振幅時間大域解を構成した。方程式がデフォーカスである場合に、エネルギー保存則を用いて適度に大きな初期値に対する時間大域解を構成した。

(8) ド・ジッター計量を持つ空間で、非線形クライン・ゴールドン方程式の初期値問題におけるエネルギー解について解説した。非線形項は冪乗型、および、指数関数型のものを考察した。

(9) 局所消散項を持つ非線形波動方程式の外部問題を考察した。障害物は三次元空間でコンパクトなものとする。零条件の仮定の下で大域解を構成した。異なる伝播速度を持つ場合も考察した。

(10) ド・ジッター空間における非線形シュレディンガー方程式の初期値適切性問題に対して、空間膨張のもたらず消散効果について解説した。

(11) ド・ジッター空間における非線形シュレディンガー方程式の初期値適切性問題を考察し、冪乗型非線形項を持つ場合の時間局所解の存在時間について考察した。

(12) ド・ジッター空間において非線形の場の方程式の非相対論的極限として得られる非線形シュレディンガー方程式に対して、ソボレフ空間における初期値問題の適切性を考察した。空間膨張が果たす消散効果を明らかにし、エネルギー評価において擬共形変換に類似する性質が見られることを指摘した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

(1)H. Lindblad, M. Nakamura, C. D. Sogge, Remarks on global solutions for nonlinear wave equations under the standard null conditions, *Journal of Differential Equations*, 254 (2013), no. 3, 1396-1436.

(2)T. Iwabuchi, M. Nakamura, Global and almost global solutions for some nonlinear parabolic equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces, *Adv. Differential Equations*, 18(2013), 687-736.

(3)M. Nakamura, Remarks on a weighted energy estimate and its application to

nonlinear wave equations in one space dimension, *Journal of Differential Equations*, 256(2014), 389-406.

(4)M. Nakamura, The Cauchy problem for semi-linear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 410(2014), 445-454.

(5)M. Ishiwata, M. Nakamura, H. Wadade, On the sharp constant of the weighted Trudinger-Moser type inequality of the scaling invariant form, *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire*, 31(2014), 297-314.

(6)M. Ishiwata, M. Nakamura, H. Wadade, On the sharp constant of the weighted Trudinger-Moser type inequality and an application to nonlinear Klein-Gordon equations, *Discrete and Continuous Dynamical System - A* (in press).

(7)M. Nakamura, Remarks on global solutions of dissipative wave equations with exponential nonlinear terms, *Special issue in Communications on Pure and Applied Analysis* (in press).

(8)M. Nakamura, Energy solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, *Current Trends in Analysis and Its Applications: Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakow 2013, (Trends in Mathematics / Research Perspectives)*, V. Mityushev, M. V. Ruzhansky (Eds.), 2015, XVI, Pages 203-208.

(9)M. Nakamura, On the solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, *Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Advanced Studies in Pure Mathematics*, vol. 64 (2014), 289-295.

(10)M. Nakamura, The Cauchy problem of semilinear Schroedinger equations in curved background, *Proceedings. Wayamba International Conference, "Sustainable Development Through Equitable Sharing," Wayamba University of Sri Lanka, Kuliypitiya Sri Lanka*, P. 302, 2014.

(11) M. Nakamura, Remarks on a dispersive equation in de Sitter spacetime, *Proceedings. Analysis of hyperbolic PDEs. The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications in Madrid, Spain, 2015* (in press).

(12) M. Nakamura, Remarks on the Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations in de Sitter spacetime, *Journal of Differential Equations* (in press).

〔報告集〕(計2件)

(1)M. Nakamura, "Weighted energy estimates and applications for nonlinear wave equations,"平成23年度「熊本大学応用解析セミナー」報告集,熊本大学,2013年12月発行,11-16ページ.

(2)M. Nakamura, "On the Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime,"平成24年度「熊本大学応用解析セミナー」報告集,熊本大学,2013年12月発行,87-90ページ.

〔学会発表〕(計47件(うち国際会議発表9件、その他発表38件))

国際会議発表

(1)M. Nakamura, Global solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, The 5th international conference on Complex Analysis and Dynamical Systems, 5月22日から27日, 2011, Akko, Israel.

(2)M. Nakamura, Energy solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, Special session 9: Qualitative properties of evolution models, 9th International ISAAC Congress, 2013年8月5日から9日, Pedagogical University, Krakow, Poland.

(3)M. Nakamura, Global solutions for nonlinear Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime, 1st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications, 2013年10月24日から26日, Seoul National University, Korea.

(4)M. Nakamura, Global solutions for nonlinear Schrodinger equations in spatial expansion, 2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, 2014年7月10日から16日, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang, China.

(5)M. Nakamura, Remarks on a dispersive equation in de Sitter spacetime, Analysis of hyperbolic PDEs, 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications in Madrid, Spain, 2014年7月7日から11日.

(6)M. Nakamura, Remarks on nonlinear Schrodinger equations in curved spacetime, ICM 2014 Satellite Conference in Harmonic Analysis, 2014年8月4日から8日, Chosun University, Gwangju, Korea.

(7)M. Nakamura, The Cauchy problem of semilinear Schrodinger equations in curved background, Wayamba International Conference, 2014年8月29日から30日, Wayamba University of Sri Lanka, Sri Lanka.

(8)M. Nakamura, Dissipative property of nonlinear Schrodinger equations in de Sitter spacetime, Workshop in Mathematical Sciences, 2014年8月31日, Wayamba University of Sri Lanka, Sri Lanka.

(9)M. Nakamura, The Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations in de Sitter spacetime, International Conference on Recent Advances in Hyperbolic Partial Differential Equations, 2014年12月4日から6日, 広島国際会議場.

その他発表

(1)M. Nakamura, Weighted energy estimates and applications for nonlinear wave equations, 熊本大学応用解析セミナー, 2011年6月25日, 熊本大学.

(2)M. Nakamura, 局所消散項付きの非線形波動方程式の初期値境界値問題について, PDE 白田記念会 ミニシンポジウム, 2011年8月24日, 北海道大学.

(3)M. Nakamura, On the solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, The 4th MSJ-SI Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute, Nonlinear dynamics in partial differential equations, Kyushu University, 9月12日から21日, 2011.

(4)T. Iwabuchi, M. Nakamura, Global and almost global solutions for some nonlinear parabolic equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年9月29日, 信州大学.

(5)M. Ishiwata, M. Nakamura, H. Wadade, 重み付き Moser-Trudinger 型不等式の最良定数について, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年9月29日, 信州大学.

(6)M. Nakamura, 非線形波動方程式の線形評価と非線形評価, 仙台偏微分方程式研究集会, 特別講演, 2011年10月8日から10日, 東北大学.

(7)M. Nakamura, Nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, 応用解析研究会, 2011年10月15日, 早稲田大学.

(8)M. Nakamura, Remarks on weighted energy estimates and nonlinear wave equations, Analysis and Partial Differential Equations Seminar, 2012年1月30日, Johns Hopkins University.

(9)M. Nakamura, Remarks on weighted energy estimates and small solutions for nonlinear wave equations under the classical null conditions, The 4th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2012年3月5日から8日, 名古屋大学.

(10)M. Nakamura, Weighted energy estimates and global solutions for nonlinear wave equations, 2012年3月8日

から 10 日, 発展方程式シンポジウム, 東海大学.

(11)M. Nakamura, Remarks on the Cauchy problem for Kirchhoff equations, 2012 年 8 月 31 日から 9 月 1 日, 研究集会 ``Recent topics related to partial differential equations, ” 宮城県白石蔵王木村屋旅館.

(12)M. Nakamura, Remarks on wave equations under standard null conditions, 2012 年 9 月 11 日 ~ 9 月 13 日, 研究集会 「第 8 回非線型の諸問題」, 財団法人宮崎県婦人会館.

(13)M. Nakamura, Remarks on global solutions for nonlinear wave equations under the standard null conditions, 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 21 日, 九州大学.

(14)M. Nakamura, H. Wadade, The Cauchy problem for dissipative wave equations with weighted nonlinear terms, 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 21 日, 九州大学.

(15)M. Nakamura, The Cauchy problem for dissipative wave equations with weighted nonlinear terms, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2012, 2012 年 11 月 16 日から 18 日, 首都大学東京.

(16)M. Nakamura, Energy solutions for dissipative wave equations with weighted nonlinear terms, International Workshop on PDE, ``Nonlinear Dispersive Equations and Fluid Mechanics-Well-posedness and Smoothing Effect-, " 2012 年 12 月 12 日から 14 日, 東北大学.

(17)M. Nakamura, Energy solutions for dissipative wave equations with weighted nonlinear terms, NLPDE セミナー, 2012 年 12 月 14 日, 京都大学.

(18)M. Nakamura, On the Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime, 熊本大学応用解析セミナー, 2013 年 1 月 26 日, 熊本大学.

(19)M. Nakamura, On the Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime, 「第 30 回九州における偏微分方程式研究集会」, 2013 年 1 月 29 日から 31 日, 福岡大学.

(20)M. Nakamura, Energy solutions for dissipative wave equations with weighted nonlinear terms, 松山解析セミナー 2013, 2013 年 2 月 8 日から 9 日, 愛媛大学.

(21)M. Nakamura, On small solutions for nonlinear wave equations in exterior domains, 2013 年 5 月 21 日, Lectures, School of Mathematical Sciences, 北京大学, 中国.

(22)M. Nakamura, Global solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, 2013 年 7 月 27 日, 第 13 回さいたま数理解析セミナー, 埼玉大学サテライトキャンパス.

(23)M. Nakamura, Remarks on Klein-Gordon equations with exponential nonlinearity, Recent Progress in Wave Models, 2013 年 9 月 17 日, 中央大学.

(24)M. Nakamura, Local and global solutions for nonlinear dissipative equations in energy spaces, Recent topics related to partial differential equations, 2013 年 9 月 18 日から 19 日, 山形大学.

(25)M. Nakamura, Remarks on a weighted energy estimate and its application to nonlinear wave equations in one space dimension, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 25 日, 愛媛大学.

(26)M. Nakamura, The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 25 日, 愛媛大学.

(27)M. Nakamura, Nonlinear Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime and its related topics, 京都大学 NLPDE セミナー, 2013 年 11 月 29 日, 京都大学.

(28)M. Nakamura, Klein-Gordon equations with singular nonlinear terms, Seminar for recent topics in PDE, 2014 年 3 月 24 日, 北海道工業大学.

(29)M. Nakamura, An application of the Trudinger-Moser inequality to nonlinear Klein-Gordon equations with singular weights, ``Recent topics in Partial Differential Equations, " 2014 年 5 月 17 日, 山形大学.

(30)M. Nakamura, Dissipative structure of nonlinear Klein-Gordon equations in expanding spacetime, ``Recent topics in Partial Differential Equations, " 2014 年 5 月 18 日, 山形大学.

(31)M. Nakamura, Nonlinear Schrodinger equations in curved spacetime, Hakodate workshop on nonlinear wave equations, 2014 年 5 月 24 日, 公立はこだて未来大学.

(32)M. Nakamura, 波動の数学解析, 第 18 回理工学研究科セミナー, 2014 年 5 月 27 日, 山形大学.

(33)M. Nakamura, Einstein の重力場方程式の初期値問題 - 1 (「宇宙の建築者は純粋数学者と思われる」(J. H. Jeans)), Encounter with Mathematics, 第 62 回 波動方程式 -- 古典物理から相対論まで--, 2014 年 9 月 15 日から 9 月 16 日, 中央大学.

(34)M. Nakamura, Einstein の重力場方程式の初期値問題 - 2 (「宇宙の建築者は純粋数学者と思われる」(J. H. Jeans)), Encounter with Mathematics, 第 62 回 波動方程式 -- 古典物理から相対論まで--, 2014 年 9 月 15 日から 9 月 16 日, 中央大学.

(35)M. Nakamura, On the Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equations in de Sitter spacetime, 日本数学会秋季総合分科

会, 2014年9月25日から9月28日, 広島大学.

(36)M. Nakamura, Remarks on Strichartz estimates and an application for nonlinear Schrodinger equations, 数理物理に現れる偏微分方程式研究会, 2015年1月9日から1月11日, 静岡県賀茂郡松崎町雲見.

(37)M. Nakamura, On the effect of spatial expansion on nonlinear Schrodinger equations, 熊本大学セミナー, 2015年3月14日, 熊本大学.

(38)M. Nakamura, T. Wada, The Cauchy problem for nonlinear Schrodinger equation in fractional order Sobolev spaces, 日本数学会年会, 2015年3月21日から3月24日, 明治大学.

研究集会開催

(1)非線形偏微分方程式研究会、2012年3月17日、組織委員(他二名)、於：福岡ガーデンパレス.

(2)研究集会 ``Recent topics related to partial differential equations," 2012年8月31日~9月1日, 開催者、於 宮城県白石蔵王木村屋旅館.

(3)国際研究集会: ``The 14th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis" (「第14回北東数学解析研究会」)、2013年2月18日から19日、組織委員(他二名)、於：東北大学.

(4)研究集会: ``Recent topics in Partial Differential Equations," 2014年5月16日から5月18日、開催者、於：山形大学.

6. 研究組織

(1)研究代表者

中村 誠 (Makoto NAKAMURA)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：70312634