様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月　 ８ 日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４０００９
研究課題名（和文）リーマンゼータ函数の微分から生じる新約数問題に関する研究

研究課題名（英文）Study on a new divisor problem arisen from the derivatives of the Riemann zeta function

研究代表者
南出　真（MINAMIDE, Makoto）

京都産業大学・理学部・講師

研究者番号：８０５９６５５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 2,400,000円、（間接経費）　 720,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は整数論の古典的な問題の一つであるディリクレの約数問題の新たなる展開である．d(n) によりｎの約数の個数を表すとする（これを約数函数と呼ぶ）．約数函数の平均の誤差項を調べることが約数問題である．リーマンゼータ函数の微分という観点から，新約数函数 D(k)(n) を定義する．D(k)(n) の平均は Σn≦xD(k)(n)=x P(2k+1)(log x) +Δ(k)(x) という形になる．誤差項 Δ(k)(x) をベッセル函数に関する有限和で表す公式などの研究成果を得た．

研究成果の概要（英文）：This research is a new development on the classical Dirichlet divisor problem. Let d(n) be the number of divisor of n (it is called the divisor function). In the average of d(n), to study the error term is called the divisor problem. From an aspect of the study of the derivatives of Riemann zeta function, we define a new divisor function D(k)(n). By this research we obtained a formula on the error term in the average of D(k)(n). It is expressed by a certain finite sum of Bessel functions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：リーマンゼータ　ゼータの微分　約数問題　ゼータの零点分布　マース形式

１．研究開始当初の背景

本研究は整数論の古典的問題ディリクレの約数問題に関する新たなる展開である．約数函数 $d(n)=\sum_{d|n}1$（自然数 n 正の約数の個数）の平均 $\sum_{n\leqq x} d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+\Delta(x)$ における誤差項 $\Delta(x)$ について詳しく調べることが約数問題である．ディリクレがハイパボラ法を用いて $\Delta(x)=O(x^{1/2})$ を示した．その後，$\Delta(x)$ のより良い評価を求める研究が盛んに行われ続けている．例えば，この $\Delta(x)$ をベッセル函数に関する有限和で表す公式，有限型ヴォロノイ公式が知られている． この公式の二乗平均により $\Delta(x)=\Omega(x^{1/4})$ が示される．$\Delta(x)=O(x^{1/4+\varepsilon})$であると予想され，ディリクレの評価の改良がこの問題の中心的課題である．また，$\Delta(x)$ は周期的ベルヌーイ函数に関する有限和で表す公式，チャウラ・ヴァルム公式が知られている．これらの研究とは全く別に，研究代表者はセルバーグゼータ函数，リーマンゼータ函数などの導函数の零点分布を研究していた．例えば，シュペイザーによりリーマン予想とリーマンゼータ函数の一階導函数 $\zeta'(s)\neq 0$ ($\mathrm{Re}\ s<1/2$, $\mathrm{Im}\ s\neq 0$) が同値であることが知られている．Re s の右側における $\zeta'(s)$の零点分布を調べる際に $\zeta'(s)$ の２乗平均を研究代表者は調べた．このことで，ζ函数の導函数の二乗に興味がある．ここで，約数函数 $d(n)$ はリーマンゼータ函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ($\mathrm{Re}\ s>1$) の２乗 $\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s}$ の係数であることに注目する．そこで，上記の約数問題とゼータ函数の導函数の研究の二つの観点より，新約数函数 $D_{(k)}(n)$ を$(\zeta^{(k)}(s))^2=\sum_{n=1}^{\infty} D_{(k)}(n)\, n^{-s}$ ($\mathrm{Re}\ s>1$) により定義する．この $D_{(k)}(n)$ について，平均を考え，その誤差項について調べることを新約数問題と呼ぶ．リーマンゼータ函数の導函数の研究を約数問題の方向へ推進するものであり，リーマンゼータ函数の導函数の研究の発展も期待できる．また，これらの問題意識，研究の考え方は約数函数に限らず，様々なディリクレ級数の係数に対して応用することも重要な課題である．

２．研究の目的

(1)上記の新約数函数$D_{(k)}(n)$ の平均 $\sum_{n\leqq x} D_{(k)}(n)$ を考える．
$D_{(k)}(n)$ がディリクレ級数 $\zeta^{(k)}(s)$ の二乗の係数であることから，ゼータ函数の函数等式を利用して $\sum_{n\leqq x}D_{(k)}(n)=x P_{(2k+1)}(\log x)+\Delta_{(k)}(x)$（ここで，$P_{(2k+1)}(t)$ は t の 2k+1 次の多項式である.）を導く．そしてその誤差項 $\Delta_{(k)}(x)$ を評価することがこの研究課題の主たる目的である．さらに，約数問題における有限型ヴォロノイ公式に対応するものを$\Delta_{(k)}(x)$の場合に求めることが得ることを目標とした．即ち，$\Delta_{(k)}(x)$ をベッセル函数に関する有限和で表記することである．

(2) さらに，その有限型ヴォロノイ公式を無限級数型に拡張し，それを用いてリーマンゼータ函数の導函数に対するアトキンソン公式を得ることが次なる課題である．これにより， ゼータ函数の導函数の研究に良い影響を与えれると思われる．

(3) これらの研究で得られる様々な公式を，リーマンゼータ函数の導函数の 2 乗の近似函数等式の研究に応用することも目的である． また，ディリクレの約数問題の研究で知られている公式などを，微分の約数問題，つまり $D_{(k)}(n)$ の場合に対応するものを求めることで，$D_{(k)}(n)$ の数論的意義を明らかにすることが本研究の肝心な問題である．

３．研究の方法

一般にディリクレ級数$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ の係数 $a(n)$ の平均 $\sum_{n\leqq x} a(n)$ を導く方法はペロンの公式を用いる．$D_{(1)}(n)$ の平均 $\sum_{n\leqq x}D_{(1)}(n)$ を求めるには $(\zeta'(s))^2$ にペロンの公式を適用する．それにより，$\sum_{n\leqq x}D_{(1)}(n)=xP_{(3)}(\log x)+(2\pi i)^{-1}\int_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}(\zeta'(s))^2x^s/s\, ds$ +(誤差項) という式を得る． ここで，εは正の小さい数, T は十分大なるパラメーター，$P_{(3)}(\log x)$ は 3 次の $\log x$ の多項式である．この積分に対して $\zeta(s)$ の函数等式 $\zeta(s)=\zeta(1-s)\chi(s)$ ($\chi(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin(2\pi/2)\Gamma(1-s)$, Γはガンマ函数である.）の微分を適用しこの積分を計算する．例えば，$(2\pi i)^{-1}\int_{-\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT}\chi^2(s)(\zeta'(1-s))^2x^s/s\, ds$ が出てくるが，これは既に知られている，通常の約数問題における有限型ヴォロノイ公式の導出と同じ方法を適用してベッセル函数を導く．しかし，$-(\pi i)^{-1}\int_{-\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT}\chi(s)\chi'(s)\zeta(1-s)\zeta'(1-s)x^s/s\, ds$ 等の積分も現れる．この被積分函数の中に $\log s$ があるので先述のようにしてベッセル函数を導くことはできない．そこで $\log s$ を $\log s/(2\pi)+\log 2\pi$ に分解し，$\log 2\pi$がかかる方は通常の方法に帰着させる．もう一方については積分を Im s の積分に書き直し，$\chi(s)$ の近似式と合わせる．さらに部分積分を適用し，従来の有限型ヴォロノイ公式の導出に使われる積分公式を活用して新しい公式を導き(但し，誤差項が新たに現れる.）ベッセル函数と $\log(nx)$ との積を積分

$-(\pi i)^{-1}\int_{-\varepsilon-iT}^{\varepsilon+iT}\chi(s)\chi'(s)\zeta(1-s)\zeta'(1-s)x^s/s\,ds$ から取り出す．このような計算を行い有限型ヴォロノイ公式の類似を導く．

無限級数型のヴォロノイ公式については $a>2$ とし $\Gamma(a)^{-1}\sum_{n\leqq x}D_{(k)}(n)(x-n)^{a-1}$ を積分を用いて表し，その積分から変形ベッセル函数を導き，a についての解析接続を行い目的の公式を導く方法を試みる．さらに，無限級型ヴォロノイ公式を活用してリーマンゼータ函数の導函数のアトキンソン公式を導く．また，$(\zeta^{(k)})^2(s)-\sum_{n\leqq x}D_{(k)}(n)n^{-s}$ を評価し，$\zeta(s)$ の導函数近似函数等式を導く．

4．研究成果

新約数函数 $D_{(k)}(n)$ の平均 $\sum_{n\leqq x}D_{(k)}(n)=xP_{(2k+1)}(\log x)+\Delta_{(k)}(x)$ における誤差項 $\Delta_{(k)}(x)$ について研究することが本研究課題の中心であり，その考えを他のゼータ函数への応用も重要な研究である．

(1) 任意の自然数 k について $\Delta_{(k)}(x)=O(x^{1/3+\varepsilon})$ という成果を得た．さらに，k=1 の場合，$\Delta_{(1)}(x)$ をベッセル函数に関する有限和で表す公式($\Delta(x)$ における有限型ヴォロノイ公式の類似)を得た．さらにその公式にベッセル函数の近似式を用いることにより，$\Delta_{(1)}(x)$ を余弦函数に関する有限和で表す公式に書き改めた．つまり，N を十分大で $N=O(x^A)$ (A はある正定数) を満たすような自然数とする．$\Delta_{(1)}(x)=x^{1/4}(4\pi 2^{1/2})^{-1}\sum_{n\leqq N}(d(n)\log^2(nx)+4d_{(0,1)}(n)\log(nx)+4D_{(1)}(x))n^{-3/4}\cos(4\pi(nx)^{1/2}-\pi/4)+$(誤差項) が成り立つ．ここで，$d_{(0,1)}(n)=-\sum_{d|n}\log d$ である．この公式を用いて，$\Delta_{(1)}(x)$の 2 乗平均 $\int_1^T\Delta_{(1)}^2(t)dt$ に対する公式を得ることができた：$\int_1^T\Delta_{(1)}^2(t)dt=(96\pi^2)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}d^2(n)\,n^{-3/2}\,T^{3/2}\log^4 T+O(T^{3/2}\log^3 T)$．実際にはこの誤差項から T と log T のべきからなる項を取り出し，誤差項を $O(T^{5/4+\varepsilon})$とさらに精密に評価した．　二乗平均のこの公式より直ちに $\Delta_{(1)}(x)$のオメガ評価 $\Omega(x^{1/4}\log^4 x)$ も導かれる．今後，上記の誤差項を改良することが新約数問題の中心課題である．$\Delta_{(1)}(x)$ の有限型ヴォロノイ公式を導く過程で得られた $\chi(s)$ の微分に関する積分公式はリーマンゼータ函数の導函数に関する研究にも役立つと思われる．

① さらに，この続きの研究として古屋淳氏(沖縄工業高等専門学校)，谷川好男氏(名古屋大学)と $\Delta_{(k)}(x)$ の評価 $O(x^{1/3+\varepsilon})$ の改良に取り組んだ．より一般にリーマンゼータ函数の k 階，l 階微分の積を考え $D_{(k,l)}(x)$ を $(-1)^{k+l}\zeta^{(k)}(s)\zeta^{(l)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}D_{(k,l)}(n)n^{-s}$ (Re s>1) により定義する．$\Delta_{(k,l)}(x)$ を $\Delta_{(k)}(x)$ と同様に，$D_{(k,l)}(n)$ の平均における誤差項と定義する．$D_{(k,k)}(x)=D_{(k)}(x)$ である．この $\Delta_{(k,l)}(x)$ を周期的ベルヌーイ公式 $\psi(x)=x-[x]-1/2$ に関する和で表す公式($\Delta(x)$ におけるチャウラ・ヴァルム公式の類似)を得た．特に k=l の場合，$\Delta_{(k)}(x)=-2\sum_{j=0}^{k}{}_kC_j\,(-1)^j\log^{k-j}x\sum_{n\leqq x^{1/2}}\psi(x/n)\log^{k+j}n+O(\log^{2k}x)$ である．さらに，指数和の議論に持ち込み，$\Delta_{(k,l)}(x)=O(x^{1/3}\log^{k+l-1}x)$ を得る．これは上述の $\Delta_{(k)}(x)=O(x^{1/3+\varepsilon})$ の改良である．さらに，指数和の方法を用いて $\Delta_{(k,l)}(x)=O(x^{229/696}\log^{k+l-1}x)$ と x のべき，1/3 も改良した．有限型ヴォロノイ公式の他に，約数問題で重要なチャウラ・ヴァルムの公式の類似が新約数問題においても得られたことは意義深い．この研究成果は，Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problem,（古屋氏，谷川氏と共著）として Math. Slovaca.（査読有）に掲載が決定している．

これら二つの研究成果によって，ゼータ函数の微分の積から生じた数論的函数の研究の面白さや重要性が明らかになったと思う．古典的な約数問題の新たな展開として今後国内外で興味を持たれるものと思われる．研究代表者は，インド・アラハバードのハリシュチャンドラ研究所をこの研究期間中に 2 度訪れヴォロノイ公式などの講演を行った．研究の裾野は広がっていくと思われる．しかし，無限級数型のヴォロノイ公式などは研究期間中にまとまらなかった．それらの完成が今後の課題である．

(2) また，古屋氏，谷川氏とはよく知られた公式 $\int_0^{\pi/2}t/\sin t\,dt=2\sum_{n=1}(-1)^{2(n-1)}(2n-1)^{-2}$ の一般化として $I_n(x)=\int_0^x t^n/\sin t\,dt$ を考察し $I_n(x)$ に関する公式を得た．その応用として，法 4 の原始的ディリクレ指標の多重 L 値に関する様々な公式を得た．例えば，$L(1,\cdots,1,2;\chi_4)=2^{2-2m}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\pi/2)L(2l+2,\chi_4)/(2m-2l-2)!$ である．左辺の $L(1,\cdots,1,2;\chi_4)$は多重 L 値であり，右辺の $L(2l+2,\chi_4)$はディリクレ L 函数の値である．多重 L 値の研究に積分値を導入したものである．この種の積分はラマヌジャンが多くの公式を残しており，多重 L 値の研究に新たなる観点を見出したものとして大きな価値があると思われる．この内容についてもインド・ハリシュチャンドラ研究所で講演した．ラマヌジャンに関する研究であるから，インドにおいてもこの研究は興味を持たれ

ると思われる.

(3) カリヤン・チャクラボルティ氏（ハリシュチャンドラ研究所, インド・アラハバード）とはSL(2,Z)に関するマースカスプ形式(ヘッケ固有函数) f のフーリエ係数 a(n) についての L 函数 $L_f(s)=\Sigma_{n=1} a(n)n^{-s}$ (Re s>1) に対する素数定理を考察した. この a(n)は約数函数 d(n)と同じ乗法性を持つ. 新約数問題の考察の中から生まれた新たな問題である. 素数定理はメビウス函数 $\mu(n)$の 平均 $\Sigma_{n\leq x}\mu(n)=o(x)$ と同値である. そこでメビウス函数 μ の類似として, $\mu^*(n)$ を $1/L_f(s)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu^*(n)n^{-s}$ (Re s >1) により定める（シャンカラナラヤナンなど(タタ研究所)がすでにこの函数を研究している.）. 実際, メビウス函数 $\mu(n)$ はリーマンゼータ函数の逆数 $1/\zeta(s)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-s}$ (Re s>1) のディリクレ級数の係数である. n=p(素数)であれば $\mu^*(p)=-a(p)$ である. それ故, その平均を考える事は興味深い. この $\mu^*(n)$ の平均 $\Sigma_{n\leq x}\mu^*(n)$ について, $O(x\exp(-A(\log x)^{1/2}))$ と評価されることを示した. また, $L_f(s)$ に対するリーマン予想と $\Sigma_{n\leq x}\mu^*(n)=O(x^{1/2+\varepsilon})$ が同値であることを示した.

約数函数 d(n) とフーリエ係数 a(n)の乗法性が同じであるが, これらと同じ乗法性を持つ数論的函数 f の絶対値の二乗に関する不等式がサンダララジャンによって示されたが (Ann. of Math.(2) 172 (2010) 1529-1538), チャクラボルティ氏と共にその結果をサンダララジャンの手法とヘルダーの不等式を応用して $|f(n)|^k$ (任意の $k\geq 1$)の場合に拡張し, まとめた成果は現在投稿中である. 約数函数と同じ乗法性を持つ数論的函数を考察することは有意義なことである.

(4) 藤澤雄介（名古屋大）とは上述のチャクラボルティ氏とのメビウス函数の研究を, 一般の代数体, 及び代数体のリューヴィル函数に拡張した. K をｄ次の代数体とし, デデキントゼータ函数 $\zeta_K(s)$ に対して, メビウス函数 μ_K を上記 (3) と同様に定義し, その平均の評価した. リューヴィル函数は $\zeta_K(2s)/\zeta_K(s)$ のディリクレ級数の係数として定義して, その平均を評価した. また, デデキントゼータ函数に対するリーマン予想と同値命題も得た. これらの成果は現在投稿中である. この種の研究はすでにランダウが行っており, 研究成果に対するインパクトは十分あ

ると思われる.

５. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）

① J. Furuya, M. Minamide and Y. Tanigawa, Moment integrals of 1/sin t and related zeta-values, Ramanujan J. 33, 423-445 (2014) (査読有)

② M. Minamide, The truncated Voronoi formula for the derivative of the Riemann zeta function, Indian J. Math. 55, 325-352 (2013) （査読有）

③ M. Minamide, On zeros of the modified Selberg zeta function for the modular group, J. Indian Math. Soc. 80, 275-312 (2013) (査読有)

④ K. Chakrabory and M. Minamide, On partial sums of a spectral analogue of the Mobius function, Proc. Indian Acad Sci. Math. Sci. 123, 193-201 (2013) (査読有)

⑤ M. Aoki and M. Minamide, A zero density estimate for the derivatives of the Riemann zeta function, J. Algebra and Number Theory Academia 2, 361-375 (2012) (査読有)

〔学会発表〕（計 11 件）

① 木内 功, 南出 真, Mean square formula for the double zeta-function, 日本数学会年会, 2014. 3. 18, 学習院大学

② K. Chakraborty, 南出 真, An inequality for Hecke multiplicative functions, 日本数学会年会, 2014. 3.18, 学習院大学

③ 古屋淳, 南出真, 谷川好男, Representations and evaluations of the error term in a certain divisor problem, 日本数学会九州支部例会, 2013. 10. 26, 宮崎大学

④ M. Minamide, On the integral $\int_0^x t^n/\sin t\,dt$, 数学セミナー, 2013. 9.26 Harish-Chandra Research Institute (インド・アラハバード)

⑤ 南出 真, マース形式のL 関数に関する素数定理, 日中セミナー準備会, 2013.6.30, 近畿大学(飯塚)

⑥ 南出 真, On the integral $\int_0^x t^n/\sin t\,dt$ and multiple L-values, 関西多重ゼータ研究会, 2013.3.23, 京都産業大学

⑦ 藤澤雄介, 南出 真 , 代数体のメビウス, リュービル関数の部分和の評価について, 日本数学会年会, 2013.3.23, 京都大学

⑧ 古屋淳, 南出 真, 谷川好男, 4を法とするディリクレ L および多重 L 値の間の関係について, 日本数学会秋季総合分化会, 2012. 9.18, 九州大学

⑨ 南出 真, $\Delta_{(1)}(x)$ の二乗平均, 日本数学会年会, 2012. 3.29, 東京理科大学

⑩ 南出 真, リーマンゼータ函数の一階導函数に対する有限型ヴォロノイ公式について, 日本数学会秋季総合分科会, 2011.10.1, 信州大学

⑪ M. Minamide, The truncated Voronoi formula for the derivative of the Riemann zeta function, 数学セミナー, 2011.9.3, Harish-Chandra Research Institute（インド・アラハバード）

６. 研究組織

(1)研究代表者

南出 真（MINAMIDE, Makoto）
京都産業大学 理学部 講師
研究者番号：80596552