

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740014

研究課題名(和文)量子群とヘッケ環の幾何学的研究

研究課題名(英文)Geometric Study of Quantum groups and Hecke algebras

研究代表者

加藤 周(Kato, Syu)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40456760

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：affine Hecke代数やKhovanov-Lauda-Rouquier代数(KLR代数)といった重要な代数系において標準加群と呼ばれる加群族が複数存在し、それらが皆古典的な準遺伝代数の枠組みで現れるのと同じ直交性と呼ばれる性質を持つことを発見し、証明した。このような直交性(+既約表現の順序)は特に既約表現の指標を決定し、表現論的により原始的な意味で指標の直交性を捉えていると考えられる。

応用として(ADE型)KLR代数の大域次元有限性(柏原の問題)、対応する量子群Poincare-Birkhoff-Witt基底と標準/大域基底の遷移行列の正値性(Lusztigの予想)を解決した。

研究成果の概要(英文)：Representation theory of affine Hecke algebras and KLR algebras are important in many aspects. I find and prove that they possess many families of standard modules whose properties are reminiscent to those in the theory of quasi-hereditary algebras. In particular, they satisfy some kind of "orthogonality property". Such an orthogonality property (and some ordering on irreducible representations) determines the characters, and seems to capture the orthogonality of characters in more primitive fashion.

As applications, we proved the finiteness of the global dimension of KLR algebras (a question raised by Kashiwara), and the positivity of the transition matrix between canonical/global bases and PBW bases (a conjecture of Lusztig).

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：アフィンヘッケ環 スプリンガー対応 形式次数 冪零錐 局所ラングランズ対応 同変導来圏 幾何学的拡大環 コストカ系

1. 研究開始当初の背景

Affine Hecke 環の通常表現は 1980 年代に Kazhdan-Lusztig, Lusztig 達により分類された。これはいわゆる局所 Langlands 対応の一部分と見ることでできる分類である。近年になって Opdam-Solleveld や研究代表者の研究(exotic Deligne-Langlands 対応)により(古典型) affine Hecke 環の既約表現にはある意味で型に依らない分類が存在するが示された。これらはルート系や特別な多様体の構造を基とするという意味において実リ一群の既約認容表現の Langlands 分類とは異なる分類--Vogan 分類(極小 K-type 分類)や Beilinson-Bernstein 型分類--に対応するようなものと解釈することができる。そして、後者の分類の中で Sp_n -進代数群の表現論との結びつきのなかで重要な緩増加表現、離散系列表現がどのように出現するかが組み合わせ論的アルゴリズムによって記述できることなどが分かっていた。

しかしながら、そのような記述が Lusztig による(一般)Springer 対応を用いた緩増加表現、離散系列表現の記述とどのように結びついているのかはといったことについてはその定式化すらままならない状態であった。

また、exotic Deligne-Langlands 対応に出現する標準加群は離散系列表現からの誘導といった通常の構成にみられるような意味づけを持たないこと、表現を解析するために必要な exotic Springer fiber の構造が詳細には分からなかったことなどから庄司俊明氏による彼の導入した limit symbol に付随する Green 関数とその代数的実現(に関する予想)が関係しているという期待があるといったこと以上は(一般的には)何もわかっていなかったに等しかった。

近年圏論化の掛け声のもと affine Hecke 環や量子群と深く関係する次数付代数系である Khovanov-Lauda-Rouquier 代数(以下 KLR 代数と呼ぶ)と呼ばれる代数たちが導入された。これらの代数系はその既約加群が量子群の良い基底(大域基底、標準基底、完全基底などと呼ばれるクラス)に対応するようなものであり、その構造を深く研究することは量子群の表現論のテンソル積の実現などを通じて結び目理論などへの応用を持つことが期待されている。しかしながら、KLR 代数の代数系としての性質(例えばその標準表現など)はあまり意味を持たない概念として研究対象から退けられてきていた。

2. 研究の目的

古典型 affine Hecke 環の表現論は超尖点表現の分類を法として Sp_n -進代数群の表現論を制御することから重要なものであること

が認識されている。この観点では affine Hecke 環のパラメタを変化させることは Sp_n -進代数群の異なる表現の圏同士を連続に結ぶという(Sp_n -進代数群の文脈からは出てこない)意味を持っている。

このパラメタの変化に伴い affine Hecke 環の定義関係式は変化するが、一般論より(パラメタの)特殊値以外ではそれらの表現圏は自然に同値になっていることが従う。そのことからパラメタを変化させたときに実際に起こることは「緩増加表現」「離散系列表現」といったラベルを持つ既約表現(とそれらの間の順序)が入れ替わり、その入れ替わり方に基づき標準表現と呼ばれる対象たちが変化してゆくという形になっている。また、この事実は affine Hecke 環が様々なパラメタ値で(一般)Springer 対応を用いて実現することを鑑みるとこのような Weyl 群の(幾何学的にも表現論的に異なる)幾何学的実現がなぜ複数存在するのかという(素朴な)問いかけとも密接に関わっている。

このように加群圏自体が同値であるにも関わらず標準表現たち(のなす族)が数多くあるような代数系という観点からは KLR 代数の標準表現たち(のなす族)は追求する価値があるものに見受けられた。なぜならばこれらには Poincare-Birkhoff-Witt 基底(以下、PBW 基底と記す)と呼ばれる多くの異なる標準的な(上に述べた大域基底などとは本質的に異なる)基底たちの族が存在し、それらのうちの一つは最も基本的な場合に(A 型の) affine Hecke 環の標準表現たちに対応していること、また PBW 基底同士の間にある種の直交関係式が存在することは 20 年以上昔から良く知られていたからである。

以上に見てきたように affine Hecke 環や KLR 代数のような多くの標準表現たちの族を持つ(持ちうる)代数系に対してそのような標準表現たちが(いわゆる quasi-hereditary 代数において現れる標準表現の類似という形で)存在することを証明し、またそれらを整理する方法を考察することが課題研究を終えた今振り返ってみると本課題の目的であったといえる。

3. 研究の方法

研究方法は exotic Deligne-Langlands 対応の研究から引き続き代数系を抽象的な幾何学的拡大代数と同定し、その性質から導かれる知見(既約表現の構造や異なる順序に関する標準表現間の関係に関する制約)と、個別具体的な代数系の一般論を組み合わせることによるところが大きかった。

具体的には

a. affine Hecke 環の表現論は冪零錐ないし

は exotic 冪零錐の、(ADE 型)KLR 代数の場合は籠の表現空間の幾何学の構造を詳細に調べるにより基本的な加群(特別な順序に関しての標準表現)たちの族がある種の直交性条件を満たすことを証明する。

- b. affine Hecke 環の表現論は affine Weyl 群の群環に特殊化し、その特殊化の構造を Young 図形を用いた組み合わせ論的手法で評価して a. と組み合わせることで欲しい完全系列の存在を証明する。(ADE 型)KLR 代数の表現論は斉藤義久による結晶基底(大域基底の組み合わせ論版)に関する鏡映操作を籠の言葉で再解釈して圏論化した斉藤鏡映関手を構成することにより直交性条件を遺伝させて求める性質を証明する。
という手順をとった。

4. 研究成果

まず、古典型 affine Hecke 環に関してはパラメタの遷移に付随する既約表現の構造の変化を記述する公式をしめし、それを基に Opdam-Solleveld の論文における affine Hecke 環の形式次元の決定において残っていた定数部を決めた論文[1]を完成させ、出版した。

並行して前作では不十分だったテンソル積操作によって導かれる Mirkovic-Vilonen 多面体(これは KLR 代数の立場からは結晶構造の全ての PBW 基底を用いた記述を組として与えているものと見なすことができ、研究計画当初の目論見を超えて意味を持つものであった)の構造の評価式を改良した論文[2]を出版した。

次に affine Hecke 環のパラメタの遷移と(一般)Springer 対応の関係については複素鏡映群の表現論に関するコストカ系の理論として抽象化してまとめた論文を執筆した(論文投稿中)。

また、(ADE 型)の KLR 代数の PBW 基底たちがその構成で出現する順序の選び方に関して quasi-hereditary 代数の言葉でいういわゆる標準表現の類似と見なせる加群たちを定め、特に KLR 代数の PBW 基底たちが圏論化の文脈において大きな意味を持ちうるということを示した論文[4]の着想を得、論文を完成させ、出版した。この論文では複素数係数 ADE 型 KLR 代数の大域次元有限性(柏原の問題)や lower PBW 基底の lower 大域基底(標準基底)に関する展開係数の正値性(Lusztig の予想)なども解決した。なお、論文[4]の arXiv への投稿後に触発された McNamara, Brundan-Kleschev-McNamara 等により(残りの BCFG 型を含む)代数的な証明も得られたことを追記しておく。

その他に exotic Deligne-Langland 対応がどのようなものであり、それがどのような表現論的応用を持つかについて書いたサーベイ[3]を執筆/出版した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1. 加藤周, Poincare-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras (査読付き), Duke Mathematical Journal 163 no.2 619--663 (2014)
2. 加藤周, Exotic 冪零錐と古典型 affine Hecke 環の表現論(査読付き), 数学 65 24-44 (2013)
3. 加藤周, 内藤聡, and 佐垣大輔, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes (査読付き), Transformation Groups 17 no.1 195--207 (2012)
4. Dan Ciubotaru, 加藤翠 and 加藤周, On characters and formal degrees of discrete series of affine Hecke algebras of classical types (査読付き), Inventiones Mathematicae 187 no.3 589--635 (2012)

[学会発表](計 10 件)

1. 加藤周, 「Kostka systems and its applications」, 2013/12/22, "Taipei Conference in Representation Theory IV", Academia Sinica
2. 加藤周, 「An algebraic study of extension algebras」, "AMC2013" 釜山国際コンベンションセンター (2013/07/02)
3. 加藤周, 「A homological study of Green polynomials」, "Algebraic Groups and Representation Theory" 香港大学 (2013/1/8)
4. 加藤周, 「An algebraic study of extension algebras」, "PRIMA2013" 上海交通大学(2013/06/25)
5. 加藤周, 「An algebraic study of extension algebras」, "Shanghai workshop on Representation Theory" 大阪大学 (2012/12/15)
6. 加藤周, 「PBW bases and KLR algebras」, MSJ-SI2012 "Schubert calculus", 2012/07/25, 大阪市立大学
7. 加藤周, 「A homological study of Green polynomials」, "Workshop on Lie theory and Representation Theory III" 華東師範大学 (2012/6/17)
8. 加藤周, 「コストカ系と表現論」,

2012/03/26 日本数学会 2012 年度年会,
代数学分科会特別講演, 東京理科大学

9. 加藤周, 「A homological study of Green polynomials」, “Representation Theory of Chevalley Groups and Related Topics” 名古屋大学 (2012/03/14)
10. 加藤周, 「On standard modules of affine Hecke algebras of classical types」, 2011/6/23 ``Double affine Hecke algebras, the Langlands program, Affine flag varieties, Conformal field theory, Super Yang-Mills theory”, CIRM, Luminy

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~syuchan/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

加藤周 (KATO, Syu)

京都大学大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40456760

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：