

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 6月 3日現在

機関番号：16101

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740021

研究課題名（和文） アイゼンシュタイン級数と関連するディリクレ級数の研究

研究課題名（英文） Study of Eisenstein series and related Dirichlet series

研究代表者

水野 義紀（MIZUNO YOSHINORI）

徳島大学・大学院ソシオテクノサイエンス研究部・准教授

研究者番号：30546388

研究成果の概要（和文）：

モジュラー形式に付随する、様々なディリクレ級数を研究した。第一に、ケッヒャー・マース級数の新しい応用を発見した。具体的には「2次ジーゲル・モジュラー形式のフーリエ係数が適当な評価を満たせば、それは自動的にカスプ形式になる」というコーネンとマーチンの最近の結果に、ケッヒャー・マース級数を用いた見通しの良い証明を与え、ベヘラー・ダスによるレベル付き版をリフティング像のカスプ性に応用した。第二に、いくつかのL関数に対し、正則な核関数を構成した。それを用いると、L関数の特殊値の数値を比較的易しく求めることが可能である。

研究成果の概要（英文）：

We study several Dirichlet series associated to modular forms of degree one or two. First, we discovered a new application of Koecher-Maass series of Siegel modular forms. Namely we got a new proof of recent result of Kohnen and Martin on a characterization of degree 2 Siegel cusp forms by the growth of their Fourier coefficients. Our main tools are Koecher-Maass series. Second, we gave some new construction of holomorphic kernel functions of modular L-functions. Using this, we can compute special L-values numerically rather easily.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：

- (1) アイゼンシュタイン級数 (2) ケッヒャー・マース級数 (3) フーリエ係数 (4) 類数
(5) L関数の特殊値 (6) ディリクレ級数 (7) 逆定理 (8) p進アイゼンシュタイン級数

1. 研究開始当初の背景

モジュラー形式に付随するディリクレ級数を詳しく調べることは、重要な課題である。

理由のひとつは、積分変換を通してモジュラー形式と密接に結びついていること、加えてそのディリクレ係数・その特殊値や極でのローラン展開係数などが、数論的に興味ある情報を含んでいるからである。これまでも多くの重要な成果が得られているが、新たな方法により改良を試み、新しい現象を発見する余地もあると感ぜられる。特に、より精密に詳しく解析することにより、定性的な結果のみならず定量的結果を得ることは、重要で興味あることである。高次元の場合にも、ジーゲル・モジュラー形式に付随するディリクレ級数のひとつとして、ケッヒャー・マース級数と呼ばれるものがある。比較的顧みられることが少なかったが、探求すべき課題は多い。例えば、非正則モジュラー形式の場合の研究は少ないし、あるいは未発見のさらなる現象、応用があると予感される。興味ある研究の多くにおいて、アイゼンシュタイン級数が、重要な役割を果たしていることに注意する。報告者は、ケッヒャー・マース級数とアイゼンシュタイン級数を中心に、いくらかの経験・成果を得ている。それらを深め応用することは意義のあるものである。

2. 研究の目的

モジュラー形式に付随する様々なディリクレ級数を、特にアイゼンシュタイン級数との関連を中心に、探求する。

(1) ケッヒャー・マース級数について：

ジーゲル・モジュラー形式に付随するディリクレ級数のひとつであるケッヒャー・マース級数を考察する。特に、非正則モジュラー形式の場合の研究や、未発見のさらなる現象、応用の発見を念頭に、ケッヒャー・マース級数の理論を深めることを目的とする。

(2) L 関数の特殊値について：

L 関数の特殊値の計算法を開拓する。これまでの研究を見ると、特殊値の定性的なことはよくわかっている場合がある。その場合でも、値を数値で出すことは、易しいとは言えない。既にいくつかの接近法が開発されているが、報告者の着想を発展させることを目的とする。

3. 研究の方法

アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開と、その積分変換の精密な研究による。主に、特殊関数を応用する解析的部分、および指標和・指数和を解析する算術的部分に分かれる。それらに関して、必要な事柄をそれぞれ実行

していく。特別な場合は、既知の結果を含む場合もあるので、既存の結果との整合性など吟味しつつ着実に実行していく。加えて、定量的結果を得られるぐらい、明示的な計算を目標とする。それにより、新たな知見に気付く可能性もあり得る。しかし、実行するに当たっては、より精密な解析が必要にあるであろう。

4. 研究成果

(1) ケッヒャー・マース級数については、以下のような成果が得られた。

- ① ヘッケ評価によるカスプ形式の特徴付けを行った。具体的には「2次ジーゲル・モジュラー形式のフーリエ係数が適当な評価を満たせば、それは自動的にカスプ形式になる」というコーネンとマーチンの最近の結果に、ケッヒャー・マース級数の収束域・極の情報、今井の逆定理、高い重さの特異モジュラー形式の非存在などを用いて、見通しの良い自然な証明を与えた。
- ② 関連して、ディリクレL関数や二元二次形式の類数を係数に持つディリクレ級数の収束域について、精密な検討を行った。これは、以下で述べるモジュラーL関数の特殊値についての研究でも欠かせないものとなった。
- ③ レベル付き斉藤・黒川リフトのカスプ性を導いた。ベヘラーとダスが報告者と異なる手法で、ヘッケ評価によるカスプ形式の特徴付けのレベル付き高次元化を行っていることが分かった。この応用として、報告者はレベル付き斉藤・黒川リフトのカスプ性を導いた。この種の結果のモジュラー形式への興味ある寄与と言える。

これらに関し、九州大学における Workshop on modular forms に於いて、成果発表を行った。また、プレプリントを作成し学術誌に投稿した。現在、査読報告に従って改訂中である。一方、以下の論文原稿の作成・再検討についても、かなりの力と時間を注いだ。

- ④ 非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のケッヒャー・マース級数の定義、解析接続、関数等式を扱った論文が *Mathematische Zeitschrift* 誌に掲載された。

これに関して、東京大学、名古屋大学、早稲

田大学それぞれにおける研究集会で成果発表した。

- ⑤ エルミート・モジュラー形式に付随するケッヒャー・マース級数を扱った論文が Forum Mathematicum 誌に掲載され、加えて 1 本受理された。(Matthes 氏との共同研究)
- ⑥ 変種ケッヒャー・マース級数の明示式とその応用を扱った論文が J. London Math. Soc 誌に掲載された。(桂田氏との共同研究)

(2)L 関数の特殊値について、以下のような成果が得られた。

第一に、非正則ヤコビ型のアイゼンシュタイン級数の特殊化を正則射影して、数種類の L 関数を取り出す正則な核関数を構成した。モジュラー形式とアイゼンシュタイン級数(あるいは高次元版の変数を制限したもの)の内積をとることで、モジュラー形式に付随するディリクレ級数の積分表示を得ることが出来る。用いるアイゼンシュタイン級数の正則化を保型形式の基底で展開すると、展開係数が付随するディリクレ級数になっているともいえる。したがって、アイゼンシュタイン級数の性質が、付随するディリクレ級数に反映する。この方法はアイゼンシュタイン級数の応用としてよく知られており、最近でも様々な変種が考察されている。しかしながら考える空間のレベル・次元が上がってしまうことが多く、数値を出すことに問題を与える。この難点を回避すべく、報告者は以下の成果を得た。

- ① 適切な非正則アイゼンシュタイン級数を定義した。テータ関数から作られる、一種のポアンカレ級数ともいえる。ハイム・ゲルジョイの仕事をヒントにした。
- ② その非正則アイゼンシュタイン級数の精密なフーリエ展開を考察した。ヤコビ・アイゼンシュタイン級数のフーリエ展開に関するアイヒラー・ザギエの荒いアナウンスのみの結果を、非正則も含めて一部確認したことにもなっている。
- ③ 構成した非正則アイゼンシュタイン級数の特殊化(引き戻し)が、L 関数の非正則な核関数になっていることを示した。すなわち、モジュラー形式との内積が、付随する L 関数を与える。
- ④ その非正則アイゼンシュタイン級数の特

殊化について、正則射影を適用した。それにより、L 関数の正則な核関数を構成した。考える空間のレベルが上がらないことが重要である。正則射影するにあたって、解析的計算の正当化が必要になるが、ラデマッハーのフラグメン・リンデレーフ定理などを援用することで、考察した数種類の場合には完全に正当化できた。

- ⑤ 特別な場合を考えると、既知の正則核関数と整合することを確認した。実際、ザギエ・水本(レベル 1、主指標)乃至はストップル(素数レベル、ルジャンドル指標)が以前構成した、2 次対称積 L 関数の正則核関数が得られた。

第二に、正則な核関数を L 関数の特殊値の計算に応用した。L 関数の特殊値の計算にあたっての利点として(a)考える空間の複雑さが回避できること、(b)微分作用素が必要ないこと、の 2 点が挙げられる。応用として、ある種のランキン・セルバーク畳み込みの特殊値の計算が可能である。例えば、ザギエ乃至はストップルは、2 次対称積 L 関数の特殊値を計算している。さらに加えて、2 次指標捻りヘッケ L 関数 2 つの積の場合を実行した。既に述べたように、通常は、どちらも指標の導手の平方倍程度、レベルが上がった空間での議論を必要とする。そのことで次元が上がってしまい、数値を出すことに問題を与える。我々の方法だとレベル 1 の空間で話が済むのである。

他のランキン・セルバーク畳み込みの場合にも有効であると感ぜられ、さらに研究を推し進める予定である。(一部、小浜隼氏との共同研究)

その他、エルミート・アイゼンシュタイン級数の p 進極限と、 p 進ジーゲル・カスプ形式を考察した論文が Journal of Number Theory 誌に掲載された。関連して、以前得た、レベル付ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数公式を書き換えて、竹森氏が得た公式と整合することを一部確認した。(菊田氏との共同研究)

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① Roland Matthes, Yoshinori Mizuno,
Spectral theory on 3-dimensional hyperbolic space and Hermitian modular forms,
Forum Mathematicum,
掲載決定(2012受理) (査読有り)

② Roland Matthes, Yoshinori Mizuno,
Regularized theta lift and formulas of
Katak-Sarnak type,
Forum Mathematicum,
85巻, 2012, 455-471 (査読有り)
10.1515/FORM.2011.103

③ Yoshinori Mizuno,
Dirichlet series associated with square of
class numbers of binary quadratic forms,
Mathematische Zeitschrift,
132巻, 2012, 837-860 (査読有り)
10.1007/s00209-012-0979-y

④ Toshiyuki Kikuta, Yoshinori Mizuno,
On p -adic Hermitian-Eisenstein series and a p -adic Siegel cusp form,
Journal of Number Theory,
132巻, 2012, 1946-1961 (査読有り)
10.1016/j.jnt.2012.03.003

⑤ Hidenori Katsurada, Yoshinori Mizuno,
Linear dependence of certain L -values of
half-integral weight modular forms,
J. London Math. Soc (2),
85巻, 2012, 455-471 (査読有り)
10.1112/jlms/jdr057

⑥ Yoshinori Mizuno,
Dirichlet series associated with square
of class numbers of binary quadratic forms,
早稲田大学整数論研究集会2012報告集, 2012, 13-26, (査読なし)

⑦ Yoshinori Mizuno,
Dirichlet series associated with square
of the class numbers,
京都大学数理解析研究所講究録 No. 1767
「保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研究」2011, 161-170, (査読なし)
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1767-16.pdf>

[学会発表] (計 5件)

① 水野義紀,
On characterization of Siegel cusp forms
of degree 2 by the Hecke bound,
Workshop on modular forms,

2012年9月28日, 九州大学(福岡県)

② 水野義紀,
Dirichlet series associated with square of
class numbers of binary quadratic forms,
早稲田大学整数論研究集会 2012,
2012年3月19日, 早稲田大学(東京都)

③ 水野義紀,
Dirichlet series associated with square of
class numbers of binary quadratic forms,
「 L -functions of automorphic forms and
related problems」
2012年3月11日, 東京大学(東京都)

④ 水野義紀,
数論的古典解析の話題から,
保型形式ミニ研究集会,
2012年3月3日, 近畿大学(大阪府)

⑤ 水野義紀,
二元二次形式の類数の自乗に付随するディ
リクレ級数について,
第5回ゼータ若手研究集会,
2012年2月11日, 名古屋大学(愛知県)

[その他]

京都大学・集中講義
「ケッヒャー・マース級数と今井の逆定理」
2012年11月26日~30日, 京都大学

ホームページ等
<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/186508/profile-ja.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

水野 義紀 (MIZUNO YOSHINORI)

徳島大学・大学院ソシオテクノサイエンス
研究部・准教授

研究者番号: 30546388

(2) 研究分担者 なし
()

研究者番号:

(3) 連携研究者 なし
()

研究者番号：