# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２６年　６月　６日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４００２４

研究課題名（和文）フロベニウス分裂の代数幾何学への応用

研究課題名（英文）Applications of Frobenius splitting to algebraic geometry

研究代表者
高木　俊輔（Takagi, Shunsuke）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：４０３８０６７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円、（間接経費）　1,020,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では，標数0の射影代数多様体Xが対数的ファノ多様体になることと，Xの十分大きな標数pへの還元が大域的F正則多様体になることは同値である，というSchwede-Smithの予想を肯定的に解決することを目標とした．予想を完全に解決することはできなかったが，Xが森夢空間もしくは曲面の場合にSchwede-Smithの予想を肯定的に解決することに成功した．さらに同じ仮定の下で，Xの標数pへの還元が無限個のpについて大域的F分裂多様体になるならば，Xは対数的カラビヤウ多様体であることも証明した．

研究成果の概要（英文）：The goal of this research project was to give an affirmative answer to Schwede-Smith's conjecture, which says that a projective variety X over an algebraically closed field of characteristic zero is log Fano if and only if its modulo p reduction is globally F-regular for sufficiently large p. We proved that the conjecture holds true when X is a Mori dream space or a surface. Under the same assumption, that is, when X is a Mori dream space or a surface, we also proved that if its modulo p reduction is globally F-split for infinitely many p, then X is log Calabi-Yau.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可換環論　代数幾何学　フロベニウス分裂　F特異点

１．研究開始当初の背景
フロベニウス写像の分裂性を用いた代数多様体の特異点の研究は，私を含め，Richard Fedder, 原伸生，Karl Schwede, Karen Smith, 渡辺敬一など多くの研究者によって進められてきた．ここで言う「特異点」とは，川又対数的端末特異点、対数的標準特異点などの双有理幾何に現れる特異点のことである．これらは，多様体に対してだけでなく，多様体とその上の因子の対に対して定義される．一方，フロベニウス写像の分裂性を用いて定義される正標数の特異点のクラスとしては，F 正則特異点，F 純特異点などがある．これらは元々環に対して定義された概念であったが，原，渡辺は，正規多様体 X とその上の有効 Q 因子 D の対(X, D)に対して定義を拡張した．そして彼らは，(X,D)が対数的 Q-Gorenstein F 正則対ならば川又対数的端末対に，F 純対ならば対数的標準対になることを証明した．私は，標数 0 の川又対数的端末対(X, D)を十分大きい標数 p に還元すると，F 正則対になることを証明した．さらに，この結果の応用として，任意余次元の逆同伴などを証明した．
このように，特異点という代数多様体の局所的な性質に関しては，フロベニウス写像の分裂性を用いたアプローチは成功を収めていると言える．そこで本研究課題では，代数多様体の大域的な性質に目を向けた．

２．研究の目的
正標数の射影代数多様体 X が大域的 F 分裂多様体であるとは，斉次座標環が F 純環になることと定義される．同様に，X が大域的 F 正則多様体とは，斉次座標環が F 正則環になることと定義される．本研究課題の申請時の目的は，双有理幾何学的な観点から，これらの多様体の性質を調べることであった．具体的には，次の Schwede, Smich の予想を研究の中心的テーマに据えた．Schwede, Smith は，標数 0 の対数的ファノ多様体は十分大きい標数 p に還元すると大域的 F 正則多様体になることを証明し，逆も正しいであろうと予想した．この予想を肯定的に解決することを本研究課題の最終目標とし，さらには，対数的カラビヤウ多様体と大域的 F 分裂多様体についても類似の対応が考えられるため，それについても考察することとした．
Schwede, Smith の予想が肯定的に解決されれば，大域的 F 正則多様体の性質を調べることによって標数 0 の対数的ファノ多様体の性質を調べることが可能になる．例えば，藤野，權業は，標数 0 の正規射影多様体の間のファイバーが連結であるような全射固有射が与えられたとき，上の多様体が対数的ファノ多様体であるならば，下の多様体も対数的ファノ多様体になることを証明した．彼らの証明はホッジ理論の深い結果を必要とするが，Schwede, Smith の予想が肯定的に解決されれば，藤野，權業の結果のホッジ理論を用いない簡単な別証明が得られる．

３．研究の方法
与えられた多様体 X が対数的ファノ多様体であることチェックするためには，対(X, D)が川又対数的端末対になるような X 上の有効 Q 因子 D を構成する必要がある．ここに Schwede，Smith の予想の難しさがある．Schwede, Smith の予想を完全に一般の場合に解決するのは困難なため，次の 2 つの場合を考える．
(1) X が森夢空間の場合
森夢空間とは，極小モデル理論の観点から見て大変良い性質を満たす多様体のことで，例えば，任意の因子について極小モデルプログラムを走らせることができる．反標準因子に関する極小モデルプログラムを走らせることによって，反標準因子がネフの場合に帰着することができる．十分大きい p に還元して大域的 F 正則多様体になるような森夢空間の反標準因子は巨大であることが示せるので，結局，反標準因子がネフかつ巨大な場合に帰着されるが，この場合には求める有効 Q 因子 D を構成することができる．

(2) X が曲面の場合
無限個の p に還元して大域的 F 分裂多様体になるならば，元々の多様体の反標準因子は擬有効である．よって反標準因子の Zariski 分解を考えることができる．Zariski 分解は標数 p への還元をとる操作と可換であることが示せるので，Zariski 分解を用いて有効 Q 因子 D を構成することを考える．

４．研究成果
(1) 森夢空間の場合の Schwede，Smith の予想
私は，大川新之介，權業善範，三内顕義との共同研究において，次の結果を得た．X を標数 0 の森夢空間とする．X が対数的ファノ多様体であることと，X の十分大きな標数 p への還元が大域的 F 正則多様体であることは同値である．これは，森夢空間の場合の Schwede, Smith の予想に他ならない．対数的ファノ多様体は森夢空間であることが知られているので，我々の結果から，「2.研究目的」で言及した藤野，權業の結果のホッジ理論を用いない別証明が得られる．また，我々の結果の別の系として，Q 分解的正規複素射影多様体 X が対数的ファノ多様体であることと，X は森夢空間で X の Cox 環が高々端末特異点しか持たないことの同値性が従う．Yi Hu と Sean Keel は，X がトーリック多様体であることと X の Cox 環が多項式環であることの同値性を示したが，我々の結果は彼らの結果の類似（一般化）と見なせる．
さらに，類似の手法を用いて，標数 0 の森夢空間 X の標数 p への還元が無限個の p について大域的 F 分裂多様体になるならば，X は対数的カラビヤウ多様体であることも証明し

た．
以上の研究成果を〔雑誌論文〕の 2.にまとめた．

(2) 曲面の場合の Schwede，Smith の予想
私は權業善範との共同研究において，次の結果を得た．X を標数 0 の射影正規曲面とする．X が対数的ファノ曲面であることと，X の十分大きな標数 p への還元が大域的 F 正則曲面であることが同値である．これは，曲面の場合の Schwede，Smith の予想に他ならない．この結果は，大川新之介によって既に得られていたが，我々の証明は大川の証明とは全く異なる．大川は混標数の変形理論を駆使して証明したが，我々の方法は，「3.研究方法」で言及した Zariski 分解を使う，幾何学的なものである．さらに，X の標数 p への還元が無限個の p について大域的 F 分裂曲面になるならば，X は対数的カラビヤウ曲面であることも証明した．この証明には，2 次元の Schwede，Smith の予想を証明する際に用いた手法をさらに発展させ，楕円曲面の場合に帰着し，楕円曲面のファイバーの分類を用いる．

(3) F 特異点と弱還元予想の関係
Bhargav Bhatt，Karl Schwede との共同研究において，F 特異点と弱還元予想の関係について調べた．弱還元予想とは，標数 0 の代数閉体上定義された d 次元非特異射影代数多様体 V が与えられたとき，無限個の p に関して，V の標数 p への還元の構造層の d 次コホモロジーにフロベニウス写像が全単射で作用する，という予想である．この予想は極めて難しく，現時点では V が種数 3 の非特異射影曲線の場合すら未解決である．この弱還元予想が，F 特異点に関する次の予想と同値であることを証明した．標数 0 の被約環 R が Du Bois 特異点であることと，無限個の p に関して，R の標数 p への還元が F 単射になることは同値である．
また Mustata，Srinivas は，弱還元予想と，非特異多様体上の乗数イデアルと判定イデアルの対応が同値であることを証明した．特異点を持つ多様体上の乗数イデアルと判定イデアルの対応が弱還元予想から従うかどうかは彼らの結果からは分からなかったが，我々は多様体が対数的 Q-Gorenstein の場合には弱還元予想から従うことを証明した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）
1．高木俊輔，渡辺敬一：F 特異点 －正標数の手法の特異点論への応用－，日本数学会『数学』，査読有，66 (2014)，no.1，1-30．

2．Yoshinori Gongyo，Shinnosuke Okawa，Akiyoshi Sannai and Shunsuke Takagi，Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings，Journal of Algebraic Geometry，査読有，In Press (2014)．

3．Osamu Fujino and Shunsuke Takagi，On the F-purity of isolated log canonical singularities，Compositio Mathematica，査読有，149 (2013)，no.9，1495-1510．

4．Shunsuke Takagi，Adjoint ideals and a correspondence between log canonicity and F-purity，Algebra & Number Theory，査読有，7 (2013)，917-942．

5．Shunsuke Takagi，Subadditivity formula for multiplier ideals associated to log pairs，Proceedings of the American Mathematical Society，査読有，141 (2013)，93-102．

〔学会発表〕（計 12 件）
１．高木俊輔，F 特異点と極小モデル理論に現れる特異点，2013 年秋季総合分科会特別講演，2013 年 9 月 25 日，愛媛大学．
２．Shunsuke Takagi, Weak ordinarity conjecture and F-singularities, 2013 Conference on Moduli and Birational Geometry, 2013 年 8 月 12 日, POSTECH, 韓国．
３．Shunsuke Takagi, A geometric interpretation of 3-dimensional F-regular graded rings, Commutative Algebra and its Interaction with Algebraic Geometry, 2013 年 7 月 9 日, CIRM, フランス．
４．Shunsuke Takagi, Globally F-regular and Frobenius split surfaces, The Commutative Algebra of Singularities in Birational Geometry: Multiplier ideals, Jets, Valuations, and Positive Characteristic Methods, 2013 年 5 月 9 日, MSRI, アメリカ．
５．Shunsuke Takagi, A correspondence between F-singularities and singularities in the minimal model program, The minimal model program in characteristic p, 2013 年 5 月 2 日, AIM, アメリカ．
６．Shunsuke Takagi, F-singularities and a conjecture of Mustata-Srinivas, 第 2 回若手代数複素幾何研究集会, 2012 年 12 月 17 日, 佐賀大学．
７．Shunsuke Takagi, On the F-purity of log canonical singularities, char-p and p-adic geometry, 2012 年 6 月 7 日, Johannes Gutenberg-Universitat Mainz, ドイツ．

8．Shunsuke Takagi, A characterization of log Fano varieties via Cox rings, Special Session on Singularities in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2013年3月31日, University of Kansas, アメリカ.
9．Shunsuke Takagi, A characterization of log Fano varieties, Arithmetic and Algebraic Geometry 2012, 2012年2月15日, 東京大学.
10．Shunsuke Takagi, F-purity of isolated log canonical singularities, Algebraic Geometry in East Asia, Taipei, 2011, 2011年11月18日, National Taiwan University, 台湾.
11．Shunsuke Takagi, On a correspondence between log canonicity and F-purity, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2011年10月25日, 城崎大会議館.
12．Shunsuke Takagi, On a correspondence between log canonicity and F-purity, 特異点論とそのひろがり, 2011年8月22日, 京都大学.

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~stakagi/

6．研究組織
(1)研究代表者
高木　俊輔（TAKAGI SHUNSUKE）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：40380670

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし