様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４００４１
研究課題名（和文）微分方程式の特異点論的研究と微分幾何学への応用

研究課題名（英文）Applications to differential geometry and singularity theory of differential equations

研究代表者
高橋　雅朋（TAKAHASHI, MASATOMO）

室蘭工業大学・工学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：８０４３１３０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円、（間接経費）　960,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式の特異点論的研究として、定性理論の研究を行い、クレロー型の１階常微分方程式系の生成的な分類を行いました。また、implicitなｎ階常微分方程式の理論を用いて、特異点を許容する１階常微分方程式の完全解の定式化とその存在性、完全積分可能なimplicitな２階常微分方程式の型の分類を行いました。
　微分幾何学への応用として、ルジャンドル曲線の理論構築を行い、ルジャンドル曲率における存在と一意性の証明を行いました。また、縮閉線や伸開線などの幾何学的性質を研究しました。さらに、幾何構造に付随した双対性と三対生の研究を行い、生成的な接線曲面の分類や幾何学的性質の研究を行いました。

研究成果の概要（英文）：As applications of singularity theory, we have studied a qualitative theory for implicit ordinary differential equations. We gave a generic classification of semi-local first order ordinary differential equations of Clairaut type. Moreover, we defined complete solutions for singular first order ordinary differential equations and gave its an existence condition. We also gave types of completely integrable implicit second order ordinary differential equations.
As applications to differential geometry, we have studied a theory of Legendre curves. We gave the existence and the uniqueness for Legendre curves via Legendre curvatures. By using the Legendre curvature, we investigated the evolutes and the involutes. Moreover, we gave a generic classifications of tangent surfaces associated with G2 and D4 geometries.

研究分野：特異点論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点　微分方程式　微分幾何学　完全解　ルジャンドル曲線　双対性　縮閉線　伸開線

１．研究開始当初の背景

特異点論、特に写像の特異点論は H. Whitney に始まり、J. Milnor、R. Thom、J. Mather 等の研究により多様体の性質や写像の性質を研究するために考察されたものであり、多様体や写像のはめ込み、埋め込み、モース理論、カタストロフ理論、開折理論等は、幾何・トポロジーはもちろんのこと代数や解析における分野とも関わりがあります。特異点論はその汎用性により様々な分野と関わりがあり、特異点論とその応用は期待される分野です。

（１）微分方程式の特異点論的研究：

Implicit な常微分方程式の定性理論は、特異点を持つ場合がある特異解の存在により特異点論の理論が必要不可欠であり、そのため研究があまりありません。また、一般解の定義に曖昧さがあることは古くから知られています。代表者(高橋)は implicit な常微分方程式に対して、一般化された完全解として一般解に対応する定義を与えました。また、ルジャンドル特異点論の１つの応用として、完全積分可能な１階偏(常)微分方程式への研究があり、完全積分可能なホロノミック系の１階偏微分方程式やその分岐に対する生成的な分類結果があります。一方で、一般的には方程式曲面が部分多様体の場合を考えますが、特異点を持つ場合に対して定性理論の研究はほとんどありません。

（２）微分幾何学の特異点論的研究：

微分幾何学や物理学等に付随した微分方程式の解の存在や性質は古くから研究されており現在も活発に研究されています。例えば、曲率の変化に従い曲線が動く曲線短縮方程式や平均曲率流方程式など様々な研究があります。しかし、特異点がある場合は曲率自体が発散してしまうため、方程式自体が定義されず、今までの手法ではそれ以上の大域的な解析は出来ません。そこで特異点論的手法・考察により特異点が現れる場合に対して定式化を行い、解の存在と性質の研究を行います。また、ルジャンドル・ヌル双対性を用いてルジャンドル曲線とヌル曲線の接線曲面の特異点の対応を研究しました。この双対性に付随する微分方程式の解の構造を研究することは自然であり、双対性には特異点が現れますので特異点論的手法・考察が必要となります。

２．研究の目的

本研究課題「微分方程式の特異点論的研究と微分幾何学への応用」では、特異点論的手法・考察を用いて、微分方程式に対する定性理論の構築と微分幾何学に対する微分方程式と特異点論の応用を行うことが目的です。具体的に次の事柄について研究を行います。

（１）微分方程式の特異点論的研究：

①　Implicit な１階常微分方程式系に対して、完全解の定義と存在条件を考察し、完全解に付随する特異解を持つための条件、接触特異点集合の特徴づけ、完全特異解の存在条件等、implicit な１階常微分方程式系の定性的な性質を明らかにすることが目的です。さらに、完全積分可能な implicit な常微分方程式系に対して分類問題を考察し生成的な分類を行い、解の様子を具体的に記述します。

②　特異点を許容する微分方程式の例として確定(不確定)特異点を持つ微分方程式がありますが、本研究ではこの場合を含む implicit な常微分方程式に対して、方程式曲面自体が特異点を持つ場合に研究を行い、完全解の定義と存在条件を具体的に記述することが目的です。

（２）微分幾何学への応用：

①　初期曲線が埋め込みの場合、曲線短縮方程式の解曲線は特異点を持たず、そのまま点に変形することが知られています。また、はめ込みの場合は途中の解曲線に特異点が現れることが知られており、爆発の様子などは解析的手法により研究されています。しかし、その後の大域的な解の存在や性質、特異点の分岐の様子は今までの解析的手法では明らかにされていません。そこで、特異点が現れる場合に対して大域的な解の存在や性質、特異点の分岐の様子を明らかにすることが目的です。さらに、初期曲線が特異点を持つ場合には、方程式自体が曲率により定義されていますので意味を持ちませんが、この場合においても特異曲率やルジャンドル曲率を用いることにより定式化を行い、特異点がある場合に対して解の存在と性質を明らかにすることが目的です。

②　ルジャンドル・ヌル双対性の幾何構造から現れる微分方程式として、次の３つが挙げられます。１つはエンゲル構造・接触構造に付随した正規３階常微分方程式であり、カルタン等の方法により不変量や性質が調べられています。残りの２つはラグランジュ・グラスマンに付随した特別な２階の連立偏微分方程式と３次元ミンコフスキー空間のコーン場に付随した１階のアイコナル方程式です。これらの偏微分方程式の解は知られていますが、解の具体的な構成法や性質、不変量をルジャンドル・ヌル双対性の立場から研究し明らかにすることが目的です。さらに、別の幾何構造に付随する双対性に対しても研究を行います。

３．研究の方法

（１）微分方程式の特異点論的研究：

①　Implicit な１階常微分方程式系を具体的に１つは多様体の接空間からの写像の零点集合として、もう１つはある１階のジェットバンドルの部分多様体として捉えます。前者の場合は完全解等をラグランジュ特異点論を用いることにより研究し、存在条件を考察します。さらに、射影化することによってルジャンドル特異点論を用いて完全解を捉えます。一方、後者の場合は単独の常微分方程式の理論がありますので、拡張することで

完全解等を定義し、存在条件を考察します。さらに、２つの関係を考察し、それぞれの定義や条件の意味を調べます。うまくいかない場合 implicit な高階の常微分方程式は、implicit な１階常微分方程式系とも考えることが出来ますので、高階の常微分方程式に対する理論を用いて、１階常微分方程式系を調べることで研究を推進します。また、射影化した implicit な１階常微分方程式系は多重写像(multi-germ)の像として考えることが出来ますので、写像の特異点論を応用して研究することが自然であり、方法は整っていると言えます。この場合、生成的な分類はルジャンドル特異点論の母関数族の理論を応用することにより実行できると思われます。単独の１階常微分方程式に対して生成的な分類やその分岐の分類を研究してきましたので、これらの理論が implicit な１階常微分方程式系に適応できるかどうか調べます。

② 高階の implicit な常微分方程式の理論を用いることで、特別な implicit な常微分方程式を射影することにより方程式曲面が特異点を持つ implicit な微分方程式を捉えることが出来ます。このことにより完全解の定義ができ、存在条件を調べることが可能となります。具体例として確定(不確定)特異点を持つ微分方程式がありますので、これらを用いて理論の確認を行い、性質を調べます。

（２）微分幾何学への応用：

① 曲線をルジャンドル曲線に持ち上げて、３次元接触多様体にて曲線短縮方程式に対応する微分方程式を考え、その射影として元の曲線を捉えます。すると、曲線に特異点がある場合でも、上のルジャンドル曲線は、はめ込みなので特異点はなく解析が出来るように思われます。曲線は、はめ込みなので曲線のフルネ・セレ型の公式とルジャンドル曲線のフルネ・セレ型の公式が作れ、その対応関係を調べることにより、対応する微分方程式を作り大域解の存在や性質、特異点の分岐の様子を解析します。そのため、ルジャンドル曲線の理論の構築を行います。

② エンゲル・ルジャンドル変換と偏微分方程式は分かっていますので、偏微分方程式の解を変換した場合どのような性質を満たすのかを調べれば良いことになります。幾何構造に付随していますので、それぞれの対応する幾何構造の言葉で解や不変量の性質を記述します。また、幾何構造をＢ２（Ｃ２）に付随する構造と捉えることにより、別の新たな幾何構造に付随する双対性の研究を行います。

４．研究成果

（１）微分方程式の特異点論的研究：

① Implicitなn階常微分方程式の特異性に注目し特異点論的考察により、幾何学的解の存在定理や完全積分可能であるための必要十分条件が得られました。

② １階常微分方程式系としてクレロー型の多重芽の生成的な分類結果を写像の多重芽の理論を用いることにより得られました。また、完全積分可能な多重芽の生成的な分類に対して母関数族を用いることにより研究を行いました。しかし、全ての生成的な分類結果を得られたわけではありませんので、今後の課題となります。

③ Implicit な１階常微分方程式に対して、implicit なn階常微分方程式の理論を用いて、方程式曲面が特異点を持つ場合の完全解の定義とその存在条件を与えました。

④ 完全積分可能な２階常微分方程式に対して、完全解だけではなく、完全特異解など全ての型の分類を行い、それぞれの型に対して性質や解の存在条件を求めました。

（２）微分方程式への応用：

① ルジャンドル曲線の曲率を２つの関数の組として導入し、ルジャンドル曲線の存在と一意性を証明しました。これは正則曲線の基本定理に対応するものであり、特異点を持つ平面曲線に対する基本定理と言えます。また、ルジャンドル曲線の曲率を用いて対応する曲線短縮方程式を導出しました。今後の課題として、この方程式の性質や解の構造の研究を行います。

② ルジャンドル曲線の曲率を用いることにより、特異点を持つ曲線として変曲点を持たないフロントの縮閉線と伸開線を定義し、これらがルジャンドル曲線の曲率の微分と積分に対応することが分かりました。また、変曲点を持つ場合は、フロントではなくフロンタルの縮閉線と伸開線を条件のもとで定義し、その存在条件や円との接触の様子など幾何学的性質を明らかにしました。

③ ルジャンドル特異点論とラグランジュ特異点論の関係に対して母関数族を考察することで、波面と焦面の関係を明らかにしました。その結果、距離２乗関数を用いることにより、元の部分多様体の焦面と管状近傍の超曲面の焦面が一致することを証明しました。また、高さ関数を用いることでペダル葉相とガウス写像の幾何学的意味を与えました。

④ ルジャンドル・ヌル双対性は幾何構造がＢ２（Ｃ２）に対応する双対性ですが、幾何構造がＧ２とＤ４に対応する双対性と三対性の研究を行い、その幾何学的性質や生成的な接線曲面の分類、双対性や三対性に基づいた偏微分方程式を与えました。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① T. Fukunaga, M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. Journal of Geometry. Vol. 104 (2013), 297-307. 査読有.
DOI: 10.1007/s00022-013-0162-6

② Masatomo Takahashi, Completely integrable implicit ordinary differential equations. Yokohama Mathematical Journal. Vol. 58 (2012), 17-29. 査読有.
③ S. Izumiya, M. Takahashi, Pedal foliations and Gauss maps of hypersurfaces in Euclidean space. Journal of Singularities. Vol. 6 (2012), 84-97. 査読有. DOI: 10.5427/jsing.2012.6g
④ S. Izumiya, M. Takahashi, On caustics of submanifolds and canal hypersurfaces in Euclidean space. Topology and its Applications. Vol. 159 (2012), 501-508. 査読有. HP: http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2011.09.025
⑤ G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality. Journal of Singularities. Vol. 3 (2011), 126-143. 査読有. DOI: 10.5427/jsing.2011.3h

〔学会発表〕(計１０件)
① 高橋雅朋, フロンタルの縮閉線と伸開線について, 第２１回沼津研究集会, 2014 年 3 月 8 日, 沼津高専.
② Masatomo Takahashi, Evolutes and involutes of fronts in the Euclidean plane, Geometric Singularity Theory. Polish-Japanese Singularity Theory Working Days. 2013 年 8 月 29 日, Banach Center, Warsaw (Polish).
③ 高橋雅朋, 縮閉線と伸開線について, 第２１回沼津研究集会, 2013 年 3 月 7 日, 沼津高専.
④ 高橋雅朋, On Legendre curves, 可微分写像の特異点論とその応用, 2012 年 12 月 10 日, 日本大学文理学部.
⑤ 高橋雅朋, Evolutes of fronts in the Euclidean plane, 数理研研究集会「特異点論の真髄の探求」, 2012 年 11 月 30 日, 京都大学数理解析研究所.
⑥ Masatomo Takahashi, Completely integrable first order ordinary differential equations, An international workshop in Singularity Theory, its Applications and Future Prospects, 2012 年 6 月 21 日, University of Liverpool.
⑦ Masatomo Takahashi, Singularities of smooth mappings with patterns, 2012 Spring Western Section Meeting, 2012 年 3 月 3 日, University of Hawaii.
⑧ 高橋雅朋, 特異点論と常微分方程式の定性理論(1)(2), 広島幾何学研究集会 2011, 2011 年 10 月 6 日, 広島大学.
⑨ 高橋雅朋, 常微分方程式の定性理論の構築, 室蘭夏の学校, 2011 年 8 月 29 日, 室蘭工業大学.
⑩ Masatomo Takahashi, Generic classifications of first order multi-Clairaut type, Workshop on Singularities in Geometry and Applications, 2011 年 5 月 20 日, Bedlewo (Polish).

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~masatomo/Mathematics.index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
高橋　雅朋（TAKAHASHI Masatomo）
室蘭工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号：80431302