様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４００５３
研究課題名（和文）組み紐理論とフレアー理論を用いた結び目と横断的結び目の研究

研究課題名（英文）A study on knots and transverse knots using braid theory and Floer theory

研究代表者
松田　浩（MATSUDA, Hiroshi）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：７０３７２７０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円、（間接経費）　960,000円

研究成果の概要（和文）：ホップ・フライプで移り合う閉4組み紐の対で横断的結び目とみたとき異なるが自己絡み数が同じものを構成した。また閉3組み紐と閉7組み紐の対についても同様の例を構成した。pとqを整数とするとき(p,q)型トーラス結び目の2橋指数を決定した。また交代的な射影図を持つ閉組み紐についても2橋指数を求めた。境界付きフレアーホモロジー理論において曲面の(境界を止めた)写像類群の不変量が定義されている。この不変量を 種数が2で境界が1つの円周からなる曲面の写像類群のうち1次元ホモロジー群への作用が自明であるトレリ群に対して計算した。

研究成果の概要（英文）：I constructed an example of a pair of closed 4-braids with the following properties; (1) they are related by a Hopf-flype, (2) they are distinct as transverse knots, (3) they have the same self-linking number. I also constructed a similar example of a pair of a closed 3-braid and a closed 7-braid. I determined 2-bridge numbers of torus knots of type (p, q), where p and q are integers. I also determined 2-bridge numbers of knots that had alternating diagrams of closed braids. An invariant of a mapping class group of a surface (fixing its boundary) is defined in bordered Floer theory. When a surface has one boundary component and is of genus 2, I calculated this invariant for elements in Torelli group. Torelli group is a subgroup of a mapping class group of a surface that acts trivially on its first homology group.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：横断的結び目　組み紐

## １．研究開始当初の背景

接触構造の入った３次元多様体内のルジャンドリアン結び目，横断的結び目は それ自身 興味深い研究対象である上に 接触構造の幾何的な性質と密接に結びついているため 注目を集める研究対象となっている。同じ位相的結び目型を持つが ルジャンドリアン結び目，横断的結び目として異なるものが存在することが知られ，これらを区別するために いくつかの不変量が定義されていた。古典的不変量(回転数とサーストン・ベネカン数)では区別できないが 異なるルジャンドリアン結び目対の具体例が 十数年前に発見されて以来，このようなルジャンドリアン結び目対を区別する新しい不変量についての研究が シンプレクティック場の理論などを基にして大きく進展している。一方 古典的不変量(自己絡み数)では区別できないが 異なる横断的結び目対の具体例は ほとんど見つかっていないため，横断的結び目の新しい不変量についての研究には 大きな進展は 見られていなかった。

私が研究してきた閉組み紐と横断的結び目との間の特別な対応を使うと,組み紐理論は接触トポロジーの研究対象である横断的結び目を 幾何的トポロジーの観点から研究する方法であると解釈することができる。一般に 1 つの結び目型は 組み紐群の中の無限個の共役類と対応するが,「交換操作」で割って得られる同値類(これを「交換類」と呼ぶ)を考えると，高々有限個の交換類と対応することが知られている。1つの交換類は 1つの横断的結び目型に対応することが知られているので，ホップ・フライプは 横断的結び目の研究に新しい視点を与えることが期待できる。実際に ホップ・フライプの 1 つの例は 古典的不変量では区別できない横断的結び目対を与えることが分かった。また 古典的不変量では区別できない横断的結び目対の 現在までに知られている例は 全てホップ・フライプの特別な場合であることも分かっていた。

## ２．研究の目的

2 つの閉組み紐をつなぐ操作を実際に全て構成すると，具体的にどのような操作が得られるのかを 組み紐理論を使って組み紐数が小さいところから順に明らかにしていく。また これらの操作の中にホップ・フライプ以外の新しい操作が含まれているかを調べる。交換類と横断的結び目型との対応から ホップ・フライプで得られる例は全て 古典的不変量では区別できない横断的結び目対を与えると予想できる。この予想が正しいことを示すため 組み合わせ的ヘガードフレアー理論や 組み合わせ的接触ホモロジー理論を使って 横断的結び目の新しい不変量を構成する。 また 現在は具体的な計算が困難である組み合わせ的結び目接触ホモロジーを計算する方法を開発し，ホップ・フライプで得られる例を全て区別できるかについて調べる。

## ３．研究の方法

異なる２つの交換類が同じ結び目型を表すとき，これらの交換類に対応する２つの閉組み紐を１回の操作で関係付ける操作の１つとして ホップ・フライプがある。ホップ・フライプの例を次ページに図示している。ホップ・フライプという操作は 横断的結び目としては異なるが 古典的不変量では区別できない対を与えることがある。これらの横断的結び目対を区別できる 新しい不変量を，ヘガードフレアー理論と接触ホモロジー理論を使って構成する。また ホップ・フライプ以外の操作からも 古典的不変量では区別できない横断的結び目対の 新しい例が得られると予想できる。このような操作は 具体的にどのような操作であるかを 組み紐理論を使って明らかにしていく。

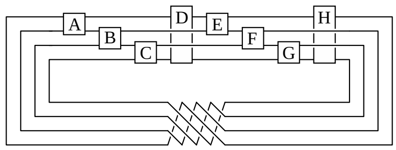
同じ結び目型に対応する閉組み紐の対を１回

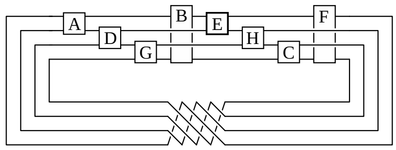
の操作で関係付ける方法を 組み紐数が 4 の時に実行する。 そして 必要な操作を全て書き出し，ホップ・フライプ以外の操作が必要であるかを調べる。ホップ・フライプ以外の操作が見つかれば 対応する横断的結び目対について 現在までに知られている横断的結び目の不変量を計算し，新しい例が得られているかを検討する。結び目接触ホモロジーから横断的結び目の不変量が得られることは分かっているが具体的な計算は困難である。そこで 結び目接触ホモロジーの 1 次の項を 具体的に計算する方法を開発し，ホップ・フライプで得られる横断的結び目対を区別できるかを調べる。

## ４．研究成果

結び目の平面的な表示方法の１種であるグリッド表示を使って 結び目フレアーホモロジー群を計算する組み合わせ的な方法が開発されていた。結び目の立体的な表示方法の 1 つとして、グリッド表示を自然に拡張したキューブ表示という方法が考案されていた。グリッド表示を使った結び目フレアーホモロジー群の計算方法を、キューブ表示に自然に拡張しても 結び目フレアーホモロジー群と同じ情報しか得られないことが知られていた。そこで 20011 年度は結び目の立体的な表示から情報を得る方法について研究した。結び目の立体的な表示方法の１つである橋表示から１方向の幅を測ることによって橋指数が定義されている。この橋指数を２次元的な幅を測ることによって拡張し２橋指数という結び目不変量が定義されていた。2 橋指数が決定されていた結び目の型は(2,q)型のトーラス結び目だけであった。ここで q は整数である。この結果を拡張し (p,q)型トーラス結び目の 2 橋指数を決定した。ここで p，q は整数である。

横断的結び目の不変量の１つとして結び目接触ホモロジー群が知られているが具体的な計算は困難である。そこで この不変量を使って定義され 計算がより簡単である修飾数と呼ばれる不変量も知られていた。負符号ホップ・フライプで移り合う閉組み紐対のうち組み紐数が 4 の例で横断的結び目として異なる新しい例を構成できることが、計算機を使った修飾数の計算により分かった。この例は下図に示すホップ・フライプの A〜H の箱に適当な数のひねりを入れることによって得られる。




2012 年度は 2011 年度に決定した(p,q)型トーラス結び目の 2 橋指数についての結果を拡張し 閉組み紐表示したとき交代射影図を持つような結び目に対して 2 橋指数は交点数より 2 だけ大きいことを示した。

ヘガートフレアー理論における横断的結び目の不変量を計算することにより 次に挙げる 4 つの特徴を持つ横断的結び目対 S，T の具体例を構成した：S(4)は S から 4 回の安定化操作を施して得られる、S(4)と T の位相的結び目型は同じ、S(4)と T の自己絡み数は同じ、S(4)と T の横断的結び目型は異なる。

2013 年度は 境界付き 3 次元多様体の不変量を使って写像類群について調べた。Ozsvath と Szabo はヘガードフレアーホモロジー群と呼ばれる閉 3 次元多様体の不変量を定義していた。Lipshitz，Ozsvath，Thurston はこの不変量を境界付き 3 次元多様体に拡張し境界付きフレアーホモロジーと呼ばれる不変量を定義した。この不変量は DA 型加群の複体に値をとる。境界が１つの円周からなる曲面 S は写像柱と呼ばれる境界付き 3 次元多様体

と自然に対応するので，この多様体の境界付きフレアーホモロジーが写像類群の不変量を与えることが自然に考えられる。彼らはこの不変量が単射であることを示した。

そこで 写像類群の中でも特に重要な部分群であるトレリ群に対して この不変量の具体的な計算を実行した。トレリ群とは 曲面 S の１次元ホモロジー群に自明に作用する写像類群の元から成る集合である。S の種数が 2 であるときトレリ群の元として２種類の元が考えられる。１つは S を１つ穴あきトーラスと２つ穴あきトーラスに分ける１本の曲線 C に沿ったデーンツイストである。もう１つは S を２つ穴あきトーラスと３つ穴あき球面に分ける２本の曲線 D に沿った適切なデーンツイストである。デーンツイストのひねりが 1 回だけであるとき C に対応する不変量は 18 個の生成元と 62 個の関係式から成る鎖複体であり、D に対応する不変量は 38 個の生成元と 154 個の関係式から成る鎖複体であることが分かった。鎖複体の鎖ホモトピー類が写像類群の不変量である。C と D に対応する元は異なる元であることが既に知られているので これらの鎖複体は互いに鎖ホモトピーの範囲で同型ではない。しかし それぞれのホッホシルトホモロジーを計算すると同型であることが分かった。これは C と D に対応する写像柱の上下の曲面を同一視して得られる写像トーラスと呼ばれる多様体を 結び目フレアーホモロジー群は区別しないことを示している。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2 件）


1．Matsuda Hiroshi, A construction of transversely non-simple knot types, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 21 巻, 査読有, 2012, DOI: 10.1142/S0218216512501088

2．Matsuda Hiroshi, 2-bridge numbers of torus knots, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 22 巻, 査読有, 2013, DOI: 10.1142/S0218216512501349


〔学会発表〕（計　1　件）

1．松田　浩, 2-bridge numbers of torus knots, 東北結び目セミナー2011, 2011 年 10 月 14 日, 東北大学 金属材料研究所

〔その他〕

アウトリーチ活動

1．2012 年度　山形大学 理学部 トワイライト開放講座　「数学者が五目並べで遊ぶと…全て想定内」2012 年 6 月 29 日

2．2013 年度　山形大学 オープンキャンパス体験授業　「Google 検索結果の順位付け」2013 年 8 月 3 日

3．2013 年度　山形大学 理学部 トワイライト開放講座　「全てを想定する」2013 年 11 月 8 日

## ６．研究組織
(1)研究代表者


松田　浩（MATSUDA HIROSHI）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：７０３７２７０３