

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740063

研究課題名(和文) 偏極射影代数多様体におけるGIT安定性の研究

研究課題名(英文) GIT stability of polarized algebraic manifolds

研究代表者

新田 泰文(Nitta, Yasufumi)

東京工業大学・理工学研究科・助教

研究者番号：90581596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：まず、偏極射影代数多様体の強相対K-安定性が漸近的相対Chow安定性を導くことを証明した。その特別な場合として、偏極射影代数多様体が強K-安定なら漸近的Chow安定であることが分かる。

次に、特殊計量の存在問題との関連として、佐々木多様体における佐々木・アインシュタイン計量の横断的正則自己同型群の作用を法とした一意性を証明した。その副産物として、横断的リッチ曲率が正である完備佐々木多様体に関するマイヤースの定理の類似を得た。

研究成果の概要(英文)：Firstly, we proved that strong relative K-stability of polarized algebraic manifolds implied asymptotic relative Chow-stability. In particular, as a special case, we see that asymptotic Chow-stability follows from strong K-stability.

Next, we showed the uniqueness of Sasaki-Einstein metrics on compact Sasaki manifolds modulo the action of the identity component of the automorphism group for the transverse holomorphic structure. Also, we obtain a Myers' type theorem for complete Sasaki manifolds with positive transverse Ricci curvature.

研究分野：複素微分幾何学

キーワード：GIT安定性 定スカラー曲率ケーラー計量 漸近的Chow安定性 強K-安定性 端的ケーラー計量

## 1. 研究開始当初の背景

ベクトル束における Hitchin-Kobayashi 対応により、コンパクトケーラー多様体上の既約な正則ベクトル束について「Mumford-Takemoto の意味で安定であることと Hermitian-Einstein 計量をもつことは同値である」ことが知られており、この意味で正則ベクトル束における安定性と特殊計量との間の関係が明確なものとして理解されている。その多様体版として、偏極射影代数多様体に対して「その偏極類が定スカラー曲率ケーラー計量(以下 CSCK 計量と呼ぶ)を含むことと多様体が幾何学的不変式論(以下 GIT と呼ぶ)の意味で安定であることは同値であろう」という予想(Donaldson-Tian-Yau 予想とも呼ばれる)が考えられ、リッチ曲率が正の場合の Calabi 予想の進化した形を含む興味深い問題として近年大きな注目を集めている。このことは、偏極多様体のモジュライ空間の研究を、CSCK 計量を用いた微分幾何学的方法で行うことができることを示唆し、その意味でこの予想の解決はモジュライ空間の微分幾何学的研究の第一歩になることができる。また、この予想は CSCK 計量というある種の非線形偏微分方程式の解の存在を GIT 安定性という代数的な概念によって判定するという側面も持っており、その意味でも幾何学的に大変意義の大きな問題であると言える。

CSCK 計量の存在に対応する安定性の候補として K-安定性と漸近的 Chow 安定性という2つの安定性が考えられており、近年の Tian, Donaldson, Stoppa, 満洲等の研究によって CSCK 計量の存在が安定性を導くことが(漸近的 Chow 安定性は条件が必要であるが)示されていた。しかし、これらの安定性を満たす多様体が CSCK 計量を持つかどうかは(研究開始当時)未解決の問題であった。この問題に貢献をしたいと思い、本研究を開始した。

## 2. 研究の目的

(1) 多様体上の K-安定性と漸近的 Chow 安定性の間の関係を精密に調べ、CSCK 計量の存在と同値になるような安定性概念を明らかにする。

(2) その対応において、CSCK 計量の一般化である extremal metric、あるいは佐々木・アインシュタイン計量がどのような位置付けになるか明らかにする。

特に、extremal metric の存在問題については大阪大学の満洲俊樹氏による「偏極多様体に対して、その偏極類が extremal metric を含むことと多様体が相対 K-安定であることは同値であろう」という予想が知られており、extremal metric の研究における一つの

方向が示されている。これは上述の Donaldson-Tian-Yau 予想を系として含み、この予想が肯定的に解決すれば、これまでの「偏極多様体における標準計量の存在と安定性の関係」に関する一連の予想に一つの決定版を与えると考えられている。

## 3. 研究の方法

(1) K-安定性を CSCK 計量の存在問題の観点から少し条件を強くした強 K-安定性という概念を導入し(満洲氏による)強 K-安定性と漸近的 Chow 安定性の関係について調べた。満洲氏の研究成果により、Chow 安定性を特徴付ける Chow norm の漸近展開を K-安定性の定義に現れるテスト配位を使って記述することができるが、その漸近展開の leading term として Donaldson-Futaki 不変量が現れることが知られている。強 K-安定な偏極多様体のテスト配位について、Donaldson-Futaki 不変量の挙動を詳細に調べ、Chow norm の評価を行った。

extremal metric の存在問題においても同様の問題を考え、上の強 K-安定性を強相対 K-安定性で、漸近的 Chow 安定性を漸近的相対 Chow 安定性で置き換えて同様の議論を考察した。

(2) ケーラー多様体の奇数次元類似して知られている佐々木多様体について、特に佐々木・アインシュタイン計量の存在問題についてケーラー幾何の方法の類似を使って考察した。佐々木多様体は奇数次元多様体であり、偏極多様体の構造もケーラー多様体の構造も持たない。従って上述の問題と直接は結びつかない。しかしながら、佐々木多様体は自然に横断的ケーラー構造を持ち、さらに佐々木・アインシュタイン計量の存在問題は(リッチ曲率が正である)横断的ケーラー・アインシュタイン計量の存在問題に帰着することが知られている。よって、ケーラー幾何学的な議論は横断的ケーラー構造を通して佐々木多様体の幾何学にある程度適用できると期待することができる。

## 4. 研究成果

(1) 満洲俊樹氏との共同研究で、偏極多様体の相対強 K-安定性が漸近的相対 Chow 安定性を導くことを証明した。その特別な場合として、偏極多様体が強 K-安定なら漸近的 Chow 安定性であることが分かる。Donaldson により、偏極多様体の正則自己同型群(のアフィン部分)が離散的であり、さらにその偏極類が CSCK 計量を持てば、その偏極多様体は漸近的 Chow 安定であることが知られている。Donaldson-Tian-Yau 予想の立場に立てば、我々の結果はこの Donaldson の結果を安定性の観点から証明したと考えることができる。特に、強 K-安定性(あるいは K-安定

性)が CSCK 計量の存在に対応する安定性概念として自然であることを示唆していると考える。

より一般に、「K-安定性が漸近的 Chow-安定性を導くか?」という問題を考えることができるが、この問題は偏極多様体の正則自己同型群が離散的でないとき反例が存在することが小野-佐野-四ツ谷によって知られている。また、多様体の特異点を許容するとき、正則自己同型群が離散的であっても反例が存在することが尾高氏によって知られている。今後の展望として、正則自己同型群が離散的であるとき K-安定性が強 K-安定性を導くかどうか明らかにすることが挙げられる。

(2) 関谷健一氏との共同研究で、佐々木多様体における佐々木・アインシュタイン計量の横断的正則自己同型群の作用を法とした一意性を証明した。コンパクトケーラー多様体におけるケーラー・アインシュタイン計量の一意性は、リッチ曲率が非正のときは Calabi によって、正のときは自己同型群の作用を法とした一意性が板東-満洲によって示されている。我々の結果は、その佐々木多様体における類推と言うことができる。佐々木多様体は、その Reeb-flow の挙動によって quasi-regular, irregular という二つのタイプを持つ。quasi-regular なコンパクト佐々木多様体はコンパクトケーラー軌道体上の主円周束の構造を持ち、この場合佐々木・アインシュタイン計量の存在問題は底空間で定義されたケーラー・アインシュタイン計量の存在問題に帰着する。特に、その一意性は上述の板東-満洲および中川氏によって既に知られている。irregular な佐々木多様体については、トーリック佐々木多様体における一意性が趙-二木-小野によって示されている。我々の結果は、これらの結果を完全な形で一般化したものになる。趙-二木-小野ではケーラー計量の空間における測地線の理論を横断的ケーラー計量の空間に適用したものが使われているのに対して、我々の方法は板東-満洲における汎関数的方法(の横断的ケーラー構造の幾何への適用)が基礎になっている。

(3) リッチ曲率が正の定数で下から抑えられている完備リーマン多様体について、その直径は有限であることが Myers の定理として知られている。本研究では、横断的リッチ曲率が正の定数で下から抑えられている完備佐々木多様体において同様の結果が成り立つことを示した。一般に横断的リッチ曲率が正であってもリッチ曲率が正であるとは限らず、このような結果が成立することは全く自明ではない。この結果は、上述の佐々木・アインシュタイン計量の一意性の証明において重要な役割を果たした。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

- (1) Toshiki Mabuchi and Yasufumi Nitta, Strong K-stability and asymptotic Chow stability, *Geometry and Analysis on Manifolds*, *Progress in Mathematics*, Vol. 308 (2015) 405-411, 査読あり.
- (2) Yasufumi Nitta, A diameter bound for Sasaki manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pica Cl. Sci (5)*, Vol. XIII (2014), 207-224, 査読あり.
- (3) Yasufumi Nitta and Ken'ichi Sekiya, Uniqueness of Sasaki-Einstein metrics, *Tohoku Math. J.* 64 (2012)453-468, 査読あり.

[学会発表](計 10 件)

- (1) Yasufumi Nitta, On strong K-stability of polarized algebraic manifolds, 満洲俊樹教授 退職記念 小研究集会, 2015 年 3 月 12 日, 大阪大学(大阪府).
- (2) Yasufumi Nitta, On K-stability and asymptotic Chow stability of polarized algebraic manifolds, 2nd Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, 2014 年 2 月 10 日, 東京工業大学(東京都).
- (3) Yasufumi Nitta, モーメント写像の諸相 II, GAP セミナー, 2013 年 12 月 10 日, 立命館大学(滋賀県).
- (4) Yasufumi Nitta, モーメント写像の諸相 I, GAP セミナー, 2013 年 12 月 6 日, 立命館大学(滋賀県).
- (5) Yasufumi Nitta, 偏極多様体における標準計量の存在問題と安定性について, 第 9 回関東若手幾何セミナー, 2013 年 10 月 19 日, 東京工業大学(東京都).
- (6) Yasufumi Nitta, 偏極多様体における標準計量の存在問題と安定性について, 大岡山談話会, 2013 年 7 月 17 日, 東京工業大学(東京都).
- (7) Yasufumi Nitta, Diameter bounds for Sasaki manifolds, 東工大幾何学セミナー, 2013 年 6 月 6 日, 東京工業大学(東京都).
- (8) Yasufumi Nitta, 偏極多様体における安定性と特殊計量の存在問題について, 松江セミナー, 2013 年 2 月 25 日, 島根大学(島根県).
- (9) Yasufumi Nitta, On relative stabilities of polarized algebraic manifolds, 2011 Complex Geometry and Symplectic Geometry Conference, 2011 年 8 月 17 日, 中国科学技術大学(中国).
- (10) Yasufumi Nitta, 偏極多様体の相対安定性について, 談話会, 2011 年 6 月 10 日, 東京理科大学(東京都).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新田 泰文 (Yasufumi Nitta)

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：90581596

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし