

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740069

研究課題名(和文) 確率制御理論の応用的研究

研究課題名(英文) An applicative study of stochastic control theory

研究代表者

中野 張 (Nakano, Yumiharu)

東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・准教授

研究者番号：00452409

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円、(間接経費) 360,000円

研究成果の概要(和文)：確率制御問題の数値解法の研究を行い、数学的に厳密に収束が保証され、かつ広範囲の問題に適用でき実装も容易な新しい近似手法の開発に成功した。この手法は計算時間の短縮についてまだ研究の余地があるが、既存手法には欠けていた厳密性・汎用性を兼ね備えている。さらに、より単純で使いやすい近似法の研究を行い、確率制御問題に対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の2次近似により解を生成する手法の近似誤差を評価した。その結果、問題の目的関数が2次的で、状態のダイナミクスが線形に近い場合は、単純な2次近似法でも精度が高いことが分かった。

研究成果の概要(英文)：This study is concerned with numerical methods for stochastic control problems, and produces a new application method that converges to a true solution for a general class of problems and is easy to implement. Although more studies are needed to reduce the computational time, this method fills up deficiencies in existing methods. Moreover, to get a simpler method, a quadratic approximation method for Hamilton-Jacobi-Bellman equation corresponding to a stochastic control problem is examined. The rigorous error bounds are estimated to find that the quadratic approximation method has a high accuracy when the equation has a quadratic-like boundary and a linear-like dynamics.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：確率制御 ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式

1. 研究開始当初の背景

確率制御問題に対する基本的なアプローチは、動的計画法により値関数が満たす Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程式を求め、これを解くことである。もし値関数が滑らかならば最適制御過程はその微分を用いたフィードバック形式で表されることが知られている。従って、確率制御問題を解くことは対応する HJB 方程式を解くことと同義であると言える。特に、制御システムが線形で目的関数が2次の汎関数の場合(これをLQG制御と呼ぶ)は、HJB方程式の解析解が存在し、ノイズを持つ制御システムの設計等、工学上の問題に応用されている。

LQG制御の他にも、確率制御理論の多くの応用が試みられている。例えば、ファイナンスにおける動的最適ポートフォリオ問題、最適取引執行問題、生体の運動制御が挙げられる。これらの問題では、強い仮定の下で解析解が得られる場合もあるが、基本的には数値解しか得られないような一般的状況での解決が求められている。しかしながら、現状ではこのような問題を数値的に解決することも難しい。実際、HJB方程式の数値解法としては、有限差分法や、被制御過程を Markov 連鎖により近似する方法が知られているが、どちらも空間の離散化を必要とするものであり、システムの次元が上がるにつれてメッシュの数は指数的に増大してしまう。現実的に適用可能なのは高々2次元のシステムに限ると言われている。

現在は最高で10次元まで適用可能な手法が知られているが、資産運用の問題では、多数の株式や債券、ファンドに投資するため10次元でも少なすぎると言える。現状は各期ごとに有限個の投資案のパフォーマンスをモンテカルロ・シミュレーションで計測し戦略を決定している運用機関が多いようだ。しかし理論的には各期ごとの最適化よりも動的最適化の方がパフォーマンスが高いことが示されており、高次元の確率制御問題の数値解法の確立することの応用上の意義は大きいと考える。

2. 研究の目的

多くの現実の問題が確率システムによって記述されるにもかかわらず、確率制御理論がその解決に十分に貢献しているとは言えない状況にある。大きな理由の一つに有用な数値解が得られにくいことがあると思われる。本研究は、確率制御問題の数値解法の研究に主眼を置き、確率制御理論の実際的な適用に資することを目的としている。特に、ブラウン運動によるシステムに対する制御問題、および、ジャンプをもつシステムに対する制御

問題を対象とし、一般の多次元非線形システム・一般の目的関数に対して実装可能な数値解法の開発を目指す。本研究の成果は最適投資、運動制御等の問題の解決に寄与する。

3. 研究の方法

(1)粘性解の意味で値関数が対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の一意解となるような広いクラスの確率制御問題に対して適用可能であり、かつ実装が比較的容易な近似法の導出を行う。

既存の多くの数値解法は、被制御過程の状態空間を直接離散化するため、厳密な収束証明に強い条件が必要になるか、あるいは値関数の「良い」補間が必要になる。これらの困難を回避するため、本研究では、制御変数に依存しない確率過程に基づく手法を検討する。これは被制御過程の期待値を適当な確率密度により畳み込み近似し、その確率論的表現を求めることで実現される。確率制御問題の値関数をこのように近似することにより、各時間ステップにおける単純なモンテカルロ法の繰り返しで計算することが可能になる。また、具体的な実装の研究を進め、解析解が得られるような人工的な問題に対するパフォーマンス評価やファイナンスにおける高次元の動的最適化問題などへの適用を行い、有効性を検証する。

(2)さらに、制御問題に付随するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の2次近似法について研究する。この提案手法により、方程式の近似解が解析的に求まるため、高次元の問題であっても高速に解くことが可能になる。数学的な誤差解析により、ハミルトニアンが2次の構造に近ければ近い程、制御問題の近似精度も高いことを示す。

4. 研究成果

確率制御問題の数値解法の研究を行い、数学的に厳密に収束が保証され、かつ広範囲の問題に適用でき実装も容易な新しい近似手法の開発に成功した。この手法は計算時間の短縮についてまだ研究の余地があるが、既存手法には欠けていた厳密性・汎用性を兼ね備えている。さらに、より単純で使いやすい近似法の研究を行い、確率制御問題に対応するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の2次近似により解を生成する手法の近似誤差を評価した。その結果、問題の目的関数が2次的で、状態のダイナミクスが線形に近い場合は、単純な2次近似法でも精度が高いことが分かった。

平成23-24年度は、先述の研究手法(1)

を実施した。確率制御問題の値関数が付随するハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式の一意的粘性解である場合に、Barles-Souganidisの単調近似の議論を援用し、提案近似法の収束を厳密に証明した。さらに、近似誤差の評価を行い、上からは時間ステップの1/4乗のオーダーで、下からは1/6乗のオーダーで押さえられることを証明した。また、提案手法の実装についても研究を行った。提案手法は、各時間ステップにおいてモンテカルロ法と非線形最適化により値関数を計算するため、非常に多くの乱数生成を必要とする。そのため、並列アルゴリズムを用い、東京工業大学のスーパーコンピュータTSUBAMEの上で計算するプログラムを開発した。以上の成果を一編の論文としてまとめ、学術雑誌に投稿中である。

平成25年度は、研究手法(2)を実施した。すなわち、連続時間確率制御問題に付随するハミルトン・ヤコビ・ベルマン(HJB)方程式の数値解析の研究を実施した。制御システムが線形の場合にはHJB方程式の解は状態変数の2次関数として表されることが知られており、この点を加味して、本研究ではHJB方程式の解の2次近似アルゴリズムを導出し、その厳密な誤差評価を行った。まず被制御過程に制御変数付きのオイラー・丸山近似を適用することによりHJB方程式の時間離散化を行い、各時間ステップにおける値関数の2次近似の剰余項を評価した。時間離散化においては、Krylovによる軟化子を用いる手法を採用し、片側の誤差が時間ステップの1/4乗のオーダーにあることを示した。さらに、方程式全体の誤差については、時間離散化誤差と空間変数に関する2次近似誤差、および2次近似を評価する領域の半径の逆数に分解できることを示し、これにより、各時間ステップの2次近似が広い領域で上手くいけばいくほど方程式の解の精度も高くなるという直感にも整合する結果が得られた。この2次近似法をいくつかの具体例に適用し、精度と使いやすさを数値的に検証した。その結果、実装は非常に容易で高い計算速度を持つこと、および境界条件が2次関数的であるときには精度が良いことが確かめられた。ゆえに、次元が高い実際上の問題に対しても適用可能であることが示唆される。以上の成果を一編の論文としてまとめ、学術雑誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

1. M. Ieda, T. Yamashita, and Y. Nakano,

A liability tracking approach to long term management of pension funds, *J.Math.Finance*, 3 (2013), 392-400. 査読有

2. 中野張, An approximation scheme for optimal stochastic control problems, *数理解析研究所講究録*, 1818 (2012), 148-157. 査読無

[学会発表](計 4件)

1. 中野張, 確率制御問題の数値解法について, *金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題* 2012, 大阪大学中之島センター, 2012年12月1日.
2. Y. Nakano, An approximation scheme for optimal stochastic control problems, *The 44th ISCTE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications*, Kokushikan University, November 2, 2012.
3. 中野張, An approximation scheme for optimal control problems, *ファイナンスの数理解析とその応用*, 2012年9月20日, 京都大学数理解析研究所.
4. Y. Nakano, An approximation scheme for optimal stochastic control problems, *Workshop: The statistical Physics of Inference and Control Theory*, September 14, 2012, Carmen de la Victoria, Granada, Spain.

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

中野 張 (NAKANO, yumiharu)

東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・准教授

研究者番号: 00452409

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：