

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 14 日現在

機関番号：12101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740100

研究課題名(和文)作用素構成因子の持つ函数論的性質を用いたチェザロ型積分作用素の解析

研究課題名(英文) Analysis of Cesaro-type integral operators via function-theoretic properties of symbol functions

研究代表者

植木 誠一郎 (Seiichiro, Ueki)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号：70512408

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：正則関数からなるベルグマン空間上のチェザロ型積分およびそれに関連の深い合成作用素、荷重合成作用素の性質を、作用素を構成する関数・写像の持つ函数論的性質を用いて特徴付ける研究を行った。主な研究手法は作用素に付随する作用素ノルムおよび本質ノルムを作用素の構成因子から定まるBerezin型変換などを用いて評価する評価不等式の確立である。また、ベルグマン空間に関連してZygmund F-algebraと呼ばれる解析関数空間を導入し、その等距離写像の構造についての特徴付けも行った。

研究成果の概要(英文)：In this research, we considered the Bergman spaces which consist of holomorphic functions on the unit disk or the unit ball and integral type operators, composition operators and weighted composition operators acting on these spaces. Our purposes are to characterize operator-theoretic properties of these operators via function-theoretic properties of symbol functions and self-maps. Furthermore we will estimate the operator norm and the essential norm for these type operators by Berezin-type transforms. Also we introduced the Zygmund F-algebra which consists of holomorphic functions. This function space contains all Bergman spaces and Nevanlinna type spaces. We investigated the structure of linear isometries or multiplicative isometries on the Zygmund F-algebra.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ベルグマン空間 チェザロ型積分作用素 合成作用素 荷重合成作用素 フォック空間 Carleson測度 Zygmund F-algebra

1. 研究開始当初の背景

解析関数空間論の研究における主要な研究テーマの一つに、与えられた関数や写像から構成される線形作用素の性質をそれらの構成因子の持つ函数論的性質を用いて特徴付ける問題がある。近年、全世界の様々な研究者達が解析関数空間上の合成作用素や荷重合成作用素の研究を行ってきたが、本研究の対象であるチェザロ型積分作用素の解析に構成因子の函数論的性質を用いる研究成果は十分に得られていない。また、従来の研究手法は、作用素の性質を関数空間に依存する位相解析的な同値条件に読み替えることであったが、この方法だと構成因子である関数や写像の持つ性質の関与の仕方が不明瞭なままであり、作用素の挙動を構成因子の具体例を通して観察するには不向きである。

チェザロ型積分作用素を解析するにあたり、2つの構成因子を同時に解析し、それらの性質を捉える挙動を見出すことが、これまでの研究動向から推察される自然な研究方向である。Stevic・植木による先行研究では、チェザロ型積分作用素の値域が上限ノルムの有界性により定義される Bloch 型の関数空間の場合を考察し、重み関数にある種の Regularity を仮定することで構成因子の持つ性質、特に境界における挙動により、チェザロ型積分の有界性・コンパクト性が特徴付けられることを明らかにした。ここでは、構成因子の挙動を捉えるための試験関数の構成に成功したことが大きな要因であったが、この手法は値域が一般のベルグマン空間の場合には通用しないことが既に判明していた。

本研究の構想を実現するためには、チェザロ型積分に対する Berezin 型変換を導入すること、Berezin 型変換の挙動と作用素に付随する量とを関連づける評価不等式の確立することの2点が必要不可欠であると考えられた。

チェザロ型積分と同様に構成因子を2つ持つ線形作用素として荷重合成作用素が研究されているが、解析関数空間論では Bloch 空間からベルグマン空間へ作用する荷重合成作用素の特徴付け問題が未解決のままである。これは Ramey・Ullrich により提起された Bloch 空間の埋め込み問題の一般化であり、 p -Bloch Carleson 測度理論などのベルグマン空間の研究に必要とされる重要な問題と認識されている。本研究は2つの作用素構成因子の同時解析、それらの持つ函数論的性質と作用素ノルムとを関連づける評価不等式の確立など荷重合成作用素の解析とも共通点が見られるので、この未解決問題の解決が期待される。

さらに、積分作用素の値域がベルグマン空間である場合の作用素ノルム・本質ノルムに対する構成因子の挙動による評価不等式の研究や積分作用素に対する Berezin 型変換の解析はこれまでに着手されてこなかったの

で、本研究は積分作用素の研究に新たなアプローチの方法を提示するものとなる。

2. 研究の目的

先行研究から得た構想 - ベルグマン空間の双対定理を利用し、チェザロ型積分作用素に対する Berezin 型変換の導入すること、Berezin 型変換の挙動を媒介にした構成因子の函数論的性質に関する情報を抽出すること - をベースとして、チェザロ型積分作用素の解析に、Berezin 型変換の挙動と作用素に付随する量とを結びつける調和解析の手法を取り入れる。この方法により、一般の重み付きベルグマン空間における同値ノルムによる評価と作用素を強い意味で近似する方法の両方を用いて、チェザロ型積分作用素の作用素ノルム・本質ノルムと Berezin 型変換の挙動との相互関係、あるいは Berezin 型変換の挙動と構成因子の定義領域の境界における挙動との関連を明確にし、構成因子の持つ函数論的性質の相互作用がどのようにチェザロ型積分作用素の作用素論的性質を特徴付けるのかを解析することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

本研究課題の申請時における研究目的は大きく分けて次の2つであった。

(1) Berezin 型変換、構成因子の挙動、チェザロ型積分のノルムとの相互関係を明確にする。

(2) 構成因子の函数論的性質の相互作用がどのようにチェザロ型積分のベルグマン空間への作用を特徴付けるのかを解析する。

これらは独立したテーマではなく各々が密接に結びついているので、ある程度は並行して研究を遂行することになる。

まず、チェザロ型積分作用素に対する Berezin 型変換の導入を可能にするためのベルグマン空間の双対定理の確立と同値ノルムの導出に着手する。次に、Berezin 型変換の構成と正則関数の同次多項式展開を利用した作用素のノルム近似手法の確立を試みる。これら基礎理論を研究期間の初期段階で準備し、チェザロ型積分作用素の特徴付けに移行する。特徴付けのための条件の候補を探るために、ベルグマン空間が Hilbert 空間となる場合に考察し、Hilbert-Schmidt ノルムの計算を実行する。Riesz の表現定理から得られる再生公式、Bergman 直交射影、正規直交基底を利用したノルム評価など、Hilbert 空間には豊富な道具が用意されているので、これらと先の予備考察で得られる事実を融合することで、Berezin 型変換の挙動を用いて作用素ノルムや本質ノルムを評価する。また、先行研究で得られた荷重合成作用素の特徴付け問題に現れる構成因子の境界挙動の作用の仕方をチェザロ型積分の解析に適用できるような形式に焼き直すことで、Hilbert-Schmidt ノルムの計算から得られる

構成因子の挙動と Berezin 型変換の挙動とを結びつけることを試みる。これにより、Hilbert 空間になる場合のチェザロ型積分作用素の特徴付けが得られると考えられる。一般のベルグマン空間の場合には、正則関数の同次多項式展開による作用素のノルム近似手法を利用し、ここで得られた Berezin 型変換の境界挙動、構成因子の境界挙動をそれぞれ詳細に解析する。

また、本研究の一環として、チェザロ型積分作用の解析手法としての Berezin 型変換の導入を目的とする解析関数空間の予備考察、積分作用素に十分関係の深い合成作用素および荷重合成作用素の性質の研究も必要に応じて行う。

4. 研究成果

申請時の研究の構想および研究目的に沿って、今回の研究で得られた成果は大きく分けて次の5つである：

(1) ベルグマン空間と β -Zygmund 空間に作用するチェザロ型積分作用素の解析。

(2) ベルグマン型空間に作用する合成作用素の解析。

(3) ベルグマン型空間に作用する荷重合成作用素の解析。

(4) ベクトル値 Fock 空間に作用する合成作用素の解析。

(5) Zygmund F-algebra の線形等距離写像と乗法的等距離写像の構造解析。

(1) では、複素平面内の単位円板上で定義されるベルグマン空間から β -Zygmund 空間へ作用するチェザロ型積分作用素の性質を特徴付ける問題を扱った。従来の研究では、値域が Zygmund 空間の場合の積分作用素の研究、特に積分作用素の作用素ノルム・本質ノルムに対する評価不等式の研究が十分に行われていなかったが、高階微分作用素による Sobolev ノルムの応用を視野に入れるとこの研究の必要性が認識される。また、値域が Bloch 型空間の場合でも作用素ノルムおよび本質ノルムに対する評価不等式は確立されていない。この研究では、チェザロ型積分作用素を構成する2つの正則関数の挙動を用いて、その作用素ノルムと本質ノルムを評価する研究を行い、ここで得られた評価不等式により、ある種の重み付き Bloch 空間に属する作用素構成因子がこの場合のチェザロ型積分作用素の有界性とコンパクト性を特徴付けることがわかった。チェザロ型積分作用素に対する評価不等式を確立した点がこの種の積分作用素の研究において目新しい点だと言える。

(2) の研究成果には次の4つの結果が含まれる：

① ベルグマン-オーリッツ空間に作用する合成作用素のコンパクト性問題。

② Nevanlinna 型空間から Bloch 型空間へ作

用する合成作用素の解析。

③ Bekolle 条件を満たす重み関数を持つベルグマン空間に作用する合成作用素の解析。

④ ベルグマン空間に作用する合成と高階微分との作用素積の特徴付け。

①は古典的なベルグマン空間の一般化である円板上で定義されるベルグマン-オーリッツ空間上の合成作用素を考察した。Littlewood の従属原理とベルグマン-オーリッツ空間のメビウス変換不変性により、円板の自己正則関数による合成作用素は常に有界であることが従うので、この研究では合成作用素がコンパクト作用素になるための必要十分条件について考察した。得られた主結果は、円板の自己正則関数による引き戻し測度がコンパクトな Carleson 測度になることが合成作用素のコンパクト性を特徴付けることを示す。これにより古典的なベルグマン空間上の合成作用素の特徴付けと関連付けることが可能となり、結果として円板の自己正則関数が円板の殆ど全ての境界点で有限な角微係数を持たないという函数論的性質により合成作用素のコンパクト性が特徴付けられた。これにより、ベルグマン-オーリッツ空間に作用する合成作用素の特徴付け問題が完全に解決された。

②では円板上で定義される Nevanlinna 型空間から Bloch 型空間へ作用する合成作用素を円板の自己正則関数と Bloch 型空間を定義する重み関数の双方を巻き込んだ挙動を通して解析した。ここで得られた各関数に対する増大度評価についての一連の結果は、Nevanlinna 型空間に作用する線形作用素の解析に有用な道具となり得ることが期待される。実際に、この結果の応用として、チェザロ型積分作用素が Nevanlinna 型空間と Bloch 型空間に作用する場合のその有界性とコンパクト性に対する特徴付けが得られた。

③は古典的なベルグマン空間の一般化として②とは異なるアプローチとして重み関数の一般化を考察している。実解析で用いられる Muckenhoupt の A_p -重み条件をベルグマン空間に応用できる形に焼き直した Bekolle 条件下でのベルグマン空間を考察している。この Bekolle 条件を満たす連続関数を重み関数とするベルグマン空間上の合成作用素は、円板の自己正則関数による $\phi(z)-w$ の零点分布に起因する個数関数と重み関数との増大度の比により有界性とコンパクト性が特徴付けられることを明らかにした。特にコンパクト性については、その個数関数と重み関数との増大度の比の挙動により本質ノルムに対する評価不等式まで得られている。また、近年盛んに研究がなされている異なるベルグマン空間の間に作用する場合の特徴付け問題も全ての場合について網羅して結果が得られた。この意味において、Bekolle 条件下でのベルグマン空間に作用する合成作用素の特徴付け問題は完全に解決された。

④では古典的なベルグマン空間に作用する合成作用素と高階微分作用素との作用素積の性質が合成作用素を定める円板の自己正則関数の増大度と微分作用素の階数の双方に影響を受けることを明らかにした。ここで得られた主結果の特別な場合として、円板の自己正則関数が Lens map、Lunar map と呼ばれる具体的な形の場合には、合成作用素の性質が自己正則関数の像について境界に接する部分の開き具合の角度が微分作用素の微分の階数によって制限されることを示した。

(3) はチェザロ型積分作用素の作用素構成因子に対する解析手法の模索に関連して、荷重合成作用素の解析に関する研究成果である。ここには次の2つの結果が該当している：

- ① 値域がベルグマン空間である場合の荷重合成作用の順序有界性の特徴付け。
- ② N_p 空間と Growth 空間との間に作用する荷重合成作用素の解析。

①は荷重合成作用素の Bloch 空間からベルグマン空間への特徴付け問題に関連して、条件を少し緩めた順序有界性の特徴付けを考察している。ベルグマン空間に起因する関数の増大度と荷重合成作用素の構成因子の挙動により Bloch 型空間の単位球のベルグマン空間の順序集合への埋め込み可能性の判定条件を与えた。ここで得られた判定条件は荷重合成作用素の Hilbert-Schmidt 性に関係することがわかった。この結果により、対数オーダーの増大度を持つ解析関数空間からベルグマン空間への荷重合成作用素の性質を特徴付けることに成功した。残念ながら Bloch 空間の埋め込み問題についての結果は得られなかったが、順序有界性、構成因子の挙動、Hilbert-Schmidt 性といった相互関係が明らかになったので、今後のチェザロ型積分作用素の解析に大いに役立つことが期待される。

②では N_p 空間と Growth 空間との間に作用する荷重合成作用素の本質ノルムに対する評価不等式を確立した。 N_p 空間に作用する合成作用素、荷重合成作用素の研究は全然なされておらず、特に本質ノルムに対する評価不等式は何も言及されてこなかった。本質ノルムに対する評価不等式が確立できたことは十分に目新しい結果である。本質ノルムに対する評価には Berezin 型変換に関連する積分変換が現れたので、今後のチェザロ型積分作用素に対する Berezin 型変換の導入・構成に一つの道筋を与えた結果となった。

(4) は複素平面全体で定義されるベクトル値 Fock 空間上の合成作用素についての解析を行っている。ここでは、合成作用素が一次式で表される整関数によってのみ定められることを明らかにした。これは構成因子が

2 次以上の多項式の場合には意味のある合成作用素を定めないことを意味する。すなわち、有界領域上のベルグマン空間の場合と異なり、合成作用素の種類が極端に少ないことを示している。構成因子が 1 次式であることに注目し、合成作用素が Self-adjoint、ユニタリー、Co-isometry となるための必要十分条件を与えた。

(5) はベルグマン空間に対する予備考察の一環として、Zygmund F-algebra や Privalov 型空間の性質に関係の深い等距離写像の構造解析に関する研究成果である。ここには次の2つの結果が含まれる：

- ① Zygmund F-algebra の線形な等距離写像の完全決定。
- ② Privalov 型空間および Zygmund F-algebra の乗法作用を保存する等距離写像の構造解析。

①では N 次元複素ユークリッド空間内の単位球上で定義される Zygmund F-algebra を新たに解析関数空間として導入し、この関数空間の1つの空間構造としての等距離写像の形を求める問題を考察した。その結果、Zygmund F-algebra の等距離写像は測度保存性質を備える単位球の自己正則写像による荷重合成作用素のみであることを、全射な等距離写像はユニタリー変換による荷重合成作用素のみであることをそれぞれ明らかにした。この応用として2つの合成作用素が等距離同型となるための必要十分条件を得た。

②は①と異なり等距離写像に線形性ではなく乗法作用のみを保存するという条件の下で、等距離写像はどのように実現されるのかを考察している。ここでは、単位球と多重円板上の関数空間を考察の対象とし、何れの場合にも、線形性を仮定しない乗法的等距離写像は合成作用素の形で表現されることを明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① A.K. Sharma, S. Ueki, Composition operators between weighted Bergman spaces with admissible Bekolle weights, Banach. J. Math. Anal., vol. 8, 64-88, 2014, 査読有
- ② A.K. Sharma, S. Ueki, Angle of contact of lens and lunar maps and products of composition and iterated differentiation, Ars. Combin., vol. 109, 415-423, 2013, 査読有
- ③ S. Ueki, On the Li-Stevic integral type operators from weighted Bergman spaces into β -Zygmund spaces, Integral Equations Operator Theory,

- vol. 74, 137-150, 2012, 査読有
- ④ S. Ueki, Weighted composition operators acting between the N_p -space and the weighted-type space H^∞ , Indag. Math., vol. 23, 243-255, 2012, 査読有
 - ⑤ S. Ueki, Order bounded weighted composition operators mapping into the Bergman space, Complex Anal. Oper. Theory, vol. 6, 549-560, 2012, 査読有
 - ⑥ S. Ueki, Isometries of the Zygmund F -algebra, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 140, 2817-2824, 2012, 査読有
 - ⑦ O. Hatori, Y. Iida, S. Stevic, S. Ueki, Multiplicative isometries on F -algebra of holomorphic functions, Abstr. Appl. Anal., vol. 2012, Article ID: 125987, 16pages, 2012, 査読有
 - ⑧ A.K. Sharma, S. Ueki, Composition operators from Nevanlinna type spaces to Bloch type spaces, Banach J. Math. Anal., vol. 6, 112-123, 2012, 査読有
 - ⑨ A.K. Sharma, S. Ueki, Compactness of composition operators acting on weighted Bergman-Orlicz spaces, Ann. Polon. Math., vol. 103, 1-13, 2011, 査読有
 - ⑩ S. Ueki, Composition operators on the Fock space of vector-valued analytic functions, Ars. Combin., vol. 100, 161-167, 2011, 査読有

[学会発表] (計 3 件)

- ① 植木誠一郎, 「Bargmann-Fock 空間上の線形作用素」, 2014 日本数学会年会函数解析学分会, 2014.3.17, 学習院大学
- ② 植木誠一郎, 「Composition operators on weighted Bergman spaces with admissible Bekolle weights」, 2012 International Workshop on Operator Theory and Applications, 2012.7.18, Univ. of NSW (オーストラリア)
- ③ 植木誠一郎, 「Linear isometries of some analytic function spaces which are contained in the Nevanlinna class」, 8th International ISAAC Congress, 2011.8.24, People's Friendship Univ. of Russia (ロシア)

[その他]

茨城大学研究者情報総覧

<http://info.ibaraki.ac.jp/scripts/websearch/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

植木 誠一郎 (UEKI SEIICHIRO)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号: 70512408