

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740106

研究課題名(和文) 多変数解析関数からなる再生核ヒルベルト空間の加群構造に付随するベクトル束の研究

研究課題名(英文) Study on vector bundles induced by module structure of reproducing kernel Hilbert spaces consisting of multivariable analytic functions

研究代表者

瀬戸 道生 (Seto, Michio)

島根大学・総合理工学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30398953

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：1. 多重円板上のハーディ空間の加群構造にはある自己共役作用素が対応する。その作用素を双正則写像で摂動してできる自己共役作用素の族を考え、パラメータを動かした時の固有値、固有関数の振る舞いを調べた。特に、自然な仮定の下で次元が飛び跳ねる固有空間の周辺では固有関数が集積するという現象を詳細に調べた。2. グラフから再生核ヒルベルト空間を構成できることは知られている。そのグラム行列とグラフのラプラシアンとの関連を調べた。さらに、グラフ準同型写像の研究に de Branges-Rovnyak の理論が導入できることを示した。

研究成果の概要(英文)：1. A certain class of self-adjoint operators is induced by submodules of the Hardy space over the bidisk. These operators are called defect operators. We studied eigenvalues and eigenfunctions of defect operators perturbed by biholomorphic maps. 2. A class of reproducing kernel Hilbert spaces can be constructed from graphs by a canonical way. We studied relation between their Gram matrices and Laplace matrices. Further, we introduced de Branges-Rovnyak theory into graph theory, and showed that it would be an appropriate framework dealing with graph homomorphisms.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：再生核ヒルベルト空間 ハーディ空間 多変数作用素論 グラフ理論

### 1. 研究開始当初の背景

ヒルベルト空間上の作用素論と複素解析学には深いつながりがある。特に、単位円板上の解析関数からなるハーディ空間とその上の掛け算作用素(さらにはテププリッツ作用素)は函数解析学と複素解析学が交差する分野における様々な問題において重要なモデルを演じてきた。

さて、ハーディ空間は通常の掛け算を作用とし、一変数多項式環を係数環とする加群の構造をもつ。そして、その部分加群たちは零点、境界での挙動により完全に記述される(Beurlingの理論)。この点が、ハーディ空間がモデルとして重宝された理由である。

その一方で、複数の作用素が現れる問題を扱う際には単位円板上のハーディ空間では十分に表現しきれない。当然、多変数解析関数からなるハーディ空間が新たなモデルの候補として考えられる。しかしながら、複素解析学的にも(これは当然のことであるが)、関数解析学的にも多変数の場合は一変数に比べ極端に部分加群の構造が複雑になることが知られており、その解明のために、新たな視点からの研究が求められていた。

さて、本研究の前段階として、研究代表者は上記の歴史を踏まえ、多重円板上のハーディ空間の加群構造を研究していた。その研究の中で、部分加群に対応する自己共役作用素を多重円板上の双正則写像(自己同型写像)で撰動してできる自己共役作用素の族に遭遇した。

中でもその族のパラメータを動かすと、各作用素の固有値1に対応する固有空間の次元が加群の共通零点の近傍で変動する現象に興味を抱いた。この現象は一変数では現れない、多変数特有のものである。さらに、この現象を利用することで、研究代表者は W. Rudin の有名な結果に別証明を与えた。

この研究代表者の手法は他の再生核ヒルベルト空間にも適用可能であるどころか、ヒルベルト空間上の作用素と多変数解析関数との関連を研究する一連の分野において、この視点の研究が欠けていることに研究代表者は気付いた。ここに大きな問題を見出し、本研究が始まることになった。

### 2. 研究の目的

正則関数からなる再生核ヒルベルト空間を考える。対象となる関数は一変数でも多変数でもよい。具体的にはハーディ空間やバークマン空間を考える。そこには自然に多項式環を係数環とする加群構造が入る。本研究の目的は、その「再生核+加群構造」から構成される自己共役作用素を、下の空間(多重円板や単位球等)に関する双正則写像で撰動して得られる作用素の族を調べることである。特に、撰動に関するパラメータを動かした時、次元が飛び跳ねる固有空間(特異ファイバー)が共通零点上で現れるが、その周囲での

固有値、固有ベクトルの動きと加群の不変量(生成元の個数など)との関連を探ることが本研究課題の目的である。

### 3. 研究の方法

(1) 多重円板上のハーディ空間の場合、通常の掛け算を作用として、そこには多項式環係数の加群構造が入る。この「加群構造」と「再生核」からある操作(Aglerの functional calculus)により、部分加群ごとに、その情報が詰め込まれていると考えられる自己共役作用素を構成することができる。この自己共役作用素を多重円板上の双正則写像で撰動すると、多重円板上の点をパラメータにもつ自己共役作用素の族を得る。この族に関し、固有値1に対応する固有空間を調べると、そこから Rudin のある有名な結果の別証明を得ることができる。従って、この族全体のスペクトル解析を行えば、より詳しく部分加群の情報が得られるはずである。特に、パラメータを動かしたときにある点で次元の飛び跳ねる固有空間(特異ファイバー)が現れる。その点の周りの固有値、固有関数の振る舞いを調べる。さらに、加群の不変量と特異ファイバーとの関連を探る。

(2) ハーディ空間の場合の研究をモデルにし、他の正則関数からなる再生核ヒルベルト空間でも同様の問題を考える。まずは、単位円板上のバークマン空間、ディリクレ空間の場合を調べる。

(3) ハーディ空間とは別のもう一つのモデルケースとして(研究を多角的にする目的もある)有限次元の場合、特に有限グラフから構成される再生核ヒルベルト空間を調べる。ここでは、(1)の観点をそのまま持ち込んで加群の作用を通常の掛け算として導入するのは自然なことに思えない。その代りに、グラフの準同型写像をグラフから構成される再生核ヒルベルト空間上の作用素として表現し、この作用素の通常的作用から導かれる一変数多項式環係数加群の構造と再生核との関連を調べる。

### 4. 研究成果

以下、(4)を除き、「3. 研究の方法」の項目に合わせて本研究課題の研究成果を述べる。

(1) 「3. 研究の方法」の(1)で述べた多重円板上の点をパラメータにもつ自己共役作用素の族について調べた。このパラメータを動かすと共通零点上で固有空間の次元が飛び跳ねることが確認されるが、その点の周りでの固有値、固有関数の振る舞いを調べた。その結果、かなり一般的な条件の下で、特異ファイバー周辺ではパラメータを動かすと他の固有値に対応する固有ベクトルがそこに集中することがわかった。また、ある

特別な部分加群の族に対するヒルベルト関数の計算を行った。これらの成果は具体的な場合にはそれぞれの方法で確認できていたことを一般的に確認したものであり、本研究における大きな前進である。しかしながら、加群の不変量との関係解明については進展しておらず、今後も継続する研究課題である。以上の結果は論文としてまとめ、専門誌に投稿、出版済みである。

(2) 単位円板上のパーグマン空間、ディリクレ空間の再生核の研究を行った。しかし、専門誌に投稿するほどの成果を得ることはできなかった。各空間に対し既に深い研究があり、研究代表者の現在の知識と経験では十分に研究が行えなかったのではないかと考えている。今後引き続き研究テーマである。わずかではあるがこの研究で得られた結果はいくつかの研究集会、セミナー等(例えば[学会発表]の)で発表した。

(3) グラフから構成される再生核ヒルベルト空間について研究した。この研究はグラフ理論の専門家である須田氏(愛知教育大学)、谷口氏(松江工業高等専門学校)との共同研究である。

この研究の目的はグラフ準同型写像を再生核ヒルベルト空間の観点から調べることであり、まずその研究を始めるための準備として、グラム行列(再生核の値を並べた行列)とグラフのラプラシアンとの関連を調べた。この結果は須田氏、谷口氏との共著論文としてまとめ、専門誌に投稿、出版済みである。さらに引き続いてグラフ準同型写像の研究を本格的に開始した。グラフを複素平面内の領域と見なせば、グラフ準同型写像の定義は「離散版領域保存の原理」と見なすことができる。この観点からグラフ準同型写像を正則写像とみなし、グラフ上の再生核ヒルベルト空間に作用する合成作用素として表現することで、de Branges-Rovnyak の理論をグラフ理論に導入することができる。基本的な結果として、グラム行列から準同型写像の情報を再現できることを示した。その他にも、ノルムの変動と辺の数の増大との関連を表す等式等を示した。1984年に de Branges が解決した Bieberbach 予想の周辺とこの研究との間にはある関連を見出せるため、この研究をさらに深めることは今後の大きなテーマである。現段階で得られている結果は須田氏、谷口氏との共著論文としてまとめ、専門誌に投稿、現在査読中である。

(4) 本研究課題の目的からは外れることになるが、(3)の研究を行う中で、合成作用素を係数とする一次方程式に遭遇した。もちろん作用素方程式の理論には古い歴史があるが、ここで問題になったのは係数を合成作用素に限定するだけでなく、さらにいつ合成作用素の中から解を選べるかということである。

ある。合成作用素の専門家にその方程式の可解性について問い合わせたが、明確な回答を得ることが出来なかった。独自に調べても、単位円板上のハーディ空間の場合ですらそのような作用素方程式の研究をみつけることができなかった。そこで、合成作用素の専門家である細川氏(茨城大学)との共同研究として、その作用素方程式について研究した。その結果、単位円板上のハーディ空間の場合に、再生核ヒルベルト空間の言葉でその方程式の可解性について記述することができた。さらに、この結果を Drury-Arveson 空間(多変数ハーディ空間の一種)へも拡張することができた。以上の成果は細川氏との共著論文としてまとめ、専門誌に投稿、現在査読中である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Seto Michio, Suda Sho, Taniguchi Tetsuji, Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs. Linear Algebra Appl. 445 (2014), 56-68, 査読有.

Seto Michio, A perturbation theory for core operators of Hilbert-Schmidt submodules in  $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^2)$ , Integral Equations Operator Theory 70 (2011), no. 3, 379-394, 査読有.

[学会発表](計 7 件)

Michio Seto, Graph homomorphisms and de Branges-Rovnyak theory, Hakata Workshop 2014 Discrete Mathematics and its Applications, 2014年2月8日, リファレンス駅東ビル(福岡市)

瀬戸 道生, 再生核ヒルベルト空間のグラフ理論への応用について, 第22回関数空間セミナー, 2013年12月21日, 東京理科大学

瀬戸 道生, Hardy 空間の加群構造に現れる Krein 空間について, 2013年度関数環研究集会, 2013年12月12日, クロスパル新潟(新潟市)

瀬戸 道生, Dirichlet 空間と作用素論 2, 2012年度関数環研究集会, 2012年11月12日, 日本大学理工学部

瀬戸 道生, 再生核ヒルベルト空間とその defect 作用素について, 第51回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2012年8月6日, 東京理科大学

Michio Seto, Operators induced by the reproducing kernel of the Dirichlet space,

Research on preserver problems concerning  
to Banach algebras and its applications,  
2011年10月31日, 京都大学数理解析研究所

Michio Seto, A perturbation theory for  
defect operators of Hilbert-Schmidt  
submodules, PARC Workshop 2011 Operator  
Theory and Its Applications, 2011年6月  
17日, Seoul National University

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

瀬戸 道生 (SETO, Michio)  
島根大学・大学院総合理工学研究科・准教授  
研究者番号：30398953

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：