

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740128

研究課題名(和文)非線形熱方程式の爆発問題と多様体の幾何構造

研究課題名(英文)Geometric structure of manifold and the blow-up problem of nonlinear heat equation

研究代表者

下條 昌彦 (SHIMOJO, Masahiko)

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号：40588779

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、無限次元力学系の理論や方程式の対称性に基づく漸近解析の手法により、爆発現象と界面運動に関連した非線形問題に取り組んだ。具体的には、以下の成果を得た。(1)半線形熱方程式の爆発点の位置を空間非一様性で制御するための詳細な条件を得た。(2)藤田型放物型方程式を複素化して得られる流体方程式の解の挙動を解明した。(3)曲率運動方程式の自由境界問題の解の挙動を「拡張交点数理論」を用いて完全分類し、解の凸性や漸近挙動の解析を行った。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research project is to consider nonlinear problems related to interfacial motions and blow-up phenomena. The methods are based on scaling related to the symmetry of the equation and on the theory of infinite dimensional dynamical systems. The following results have been obtained: (1) We studied nonlinear heat equations with power nonlinearity multiplied by a spatial inhomogeneous coefficient, which has zero points in the domain. We have given several conditions to determine blow-up point. (2) We consider the Cauchy problem for a system of parabolic equations which is derived from a complex-valued equation with a quadratic nonlinearity. Global dynamics and blow-up phenomena was considered. (3) We have succeeded in determining all possible type of the behavior of a free boundary problem of a curvature-dependent motion of a curve, by applying new "extended" intersection number principle. The results for asymptotic behavior and convexity are also established.

研究分野：解析学

キーワード：爆発問題 非線形熱方程式 複素藤田型方程式 爆発点の制御 曲率流 自由境界問題

## 1. 研究開始当初の背景

非線形熱方程式の解が局所的に無限大に発散する爆発現象や伝播現象は、化学反応や生物のパターン形成の複雑な模様の中にしばしば観察される。ユークリッド空間ではそれらの解の挙動は国内外で長きに渡って盛んに研究されてきた。その一方、Grigoryanらにより非コンパクトリーマン多様体や無限グラフ上の線形熱方程式の熱核の長時間挙動と空間の大域的な性質との深いつながりが明らかになっていった。これら双方の歴史あるテーマを結びつけ、新しい数学的構造や現象を見出そうとするのが本研究の課題であった。また無限グラフ上の非線形方程式に関してはネットワークの曲線縮流方程式に関する Magni, Mantegazza と Novaga による一連の研究があり、解の漸近挙動、解曲線の凸性の解析や特異性の分類などが行われ始めていた。

## 2. 研究の目的

これまでユークリッド空間で行われてきた反応拡散系の解の挙動に関する問題を方程式の定義域ないしは値域を多様体に拡張し、その幾何的な情報が解の大域的な挙動にどのように反映するのかを知ることを目指した。それにより、これまでの爆発問題や反応拡散方程式の研究では見られなかった新しい現象を見つけ、その漸近挙動の解析を行うことも研究目的である。無限グラフ上の様々な曲率流の解析ではまず対称性が高い場合に着目し、その解の存在や漸近挙動を調べた。その際、ある種の自由境界問題の解の挙動を知る必要が生じ、その解析が最初の目標となった。

## 3. 研究の方法

### (1) 局所座標系と空間非一性の考察

藤田型の半線形熱方程式の爆発問題において爆発点近傍での時空に関して適当なリスケー

リングを施した座標で見れば解の爆発点での挙動が詳細にわかる。しかしながら多様体上での爆発問題ではユークリッド空間上の場合と異なり空間非一様な係数のため、方程式が平行移動不変性でないし、方程式の自己相似性も破れている。非コンパクトリーマン多様体上で非線形熱方程式の解の爆発問題を計算し、多様体の幾何的な形状による藤田の臨界指数やソボレフの臨界指数などへの影響を考察した。その後一般の多様体での解析は困難な点が多かったので、擬球や双曲空間など綺麗な座標が入る簡単な場合から考察した。またこの問題の延長としてユークリッド空間上の爆発問題で空間非一様性の影響を中心により詳しく考察した。この空間非一様性を考察する問題は半線形熱方程式の爆発点制御の考えにつながっていった。

### (2) 値域の一般化と流体方程式

半線形熱方程式において定義域だけでなく値域を実数以外の空間に置きかえる問題を考えた。この問題は流体方程式においての応用が見出された。複素数をハミルトンの4次元数などリー群などに置き換える方針が進めるのは今後の課題である。

### (3) 自由境界問題の解析

曲線の曲率運動に付随した自由境界問題を解析した。端点  $x$  軸上に拘束されており曲線が上半平面上にある場合を考えた。解析ではカノニカルな座標系を選んで、閉曲線の曲率流や爆発問題や反応拡散系の解析結果と手法を自由境界問題へ一般化していく方向で研究を行った。研究では新しい交点数理論も必要になった。角度一定自由境界問題を重点的に解析したが、これはネットワーク曲率流の特殊な場合である。したがってこのタイプの自由境界問題の解析はグラフ上での反応拡散系というプロジェクトの最初のステップとなる。最近では界面方程式を面積保存型曲率流にも一

般化している．微分幾何の論文を見ると定常解の安定性を議論していることが多いが，本研究では時間発展する解の漸近挙動を議論している．高次元の場合や，クリスタライン曲率流，あるいは曲がった支持曲面の場合に一般化している方向でも研究を進めている．

#### 4．研究成果

##### (1) 爆発点の制御と空間非一様性(論文)

非線形項の前に空間非一様な係数  $V(x)$  が乗じられた形の半線形熱方程式について係数  $V(x)$  の零点で解が爆発するか否かを解析した．この問題について J.S.Guo 教授は「 $V(x)$  の零点はすべて爆発点ではない」という予想を提唱していたが，長い間未解決であった．論文ではこの予想が正しい場合の初期値や係数  $V(x)$  に対するいくつかの簡単な十分条件を与えた．さらに上記の予想が一般には正しくはなく，適当な領域と  $V(x)$  に対して「 $V(x)$  の零点も爆発点になる」例を構成した．この結果はユークリッド空間上でのものであるが，定義域が多様体の場合はその曲がり具合に応じた空間非一様性を必然的に考える点で多様体上での解析学というプロジェクトにも繋がっている．

##### (2) 流体方程式との関連研究(論文)

爆発問題でよく知られている藤田型方程式を複素化して得られる反応拡散系を考えた．この方程式系は流体力学で現れる粘性付き Constantin-Lax-Majda 方程式の解を一部に含んでおり流体现象とも深い関わりがある．論文では時間大域的な解がどのような場合に存在するのか，またその漸近挙動はどうなっているのかについて議論した．また常微分方程式の解は一つの成分しか爆発し得ないにも関わらず，線形の拡散項を付けると「ほとんどすべての爆発解」が拡散誘導同時爆発を引き起こすことを証明した．これはチューリング不安定性のパラダイムで考えれば，新しい現象の一つである．当初の予想よりも深い構造が後に見つかり，最近ではこの複素化方程式の研究を行う研究者が国内外でも増えてきている．

##### (3) 曲率流の自由境界問題(講義録)

$V = \kappa + A$  という形の曲線の運動方程式の自由境界問題を考えた．ここで  $V$  は曲線の法線速度を表し， $\kappa$  は曲率と  $A$  は正定数である．界面の端点の動きが直線に拘束され

ており，その接触角が左側と右側で異なる一定角により与えられる自由境界問題を解析した．まず解の挙動を**完全分類**した．すなわち，以下の挙動ですべての場合が尽くされる．

(A) 曲率の影響が大きい場合，有限時間で曲線が一点に縮み，曲率が爆発する．

(B) 外力項が曲率の影響を打ち消していき，解が無限に広がっていく．

(C) (A), (B) の効果が釣り合って解が上下から有界な面積を保ち続ける．

次に (A), (C) の場合の解の**漸近凸性**を証明した．最後に (A), (B) の場合の時空スケールリングの議論と無限次元力学系の理論を駆使して解の**漸近挙動**を解析した．(C) の場合では，新しい交点数の理論を開発して横方向に一定スピードで移動する進行波に収束することを証明した．また上の3つの各ケースを実現する非自明な解を実際に構成することにも成功した．また面積保存型の曲率流方程式で同様の問題を考察し，初期値に関する凸性を仮定して解の漸近挙動を計算した．具体的には進行波が局所指数安定性であることを証明した．なお面積保存型問題に対する解の漸近凸性や自己交差問題に関してはより詳細な研究を進める必要があり，今後の課題のひとつである．

#### 5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

J.S. Guo, H.Ninomiya, M. Shimojo and E. Yanagida, Convergence and blow-up of solutions for a complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity, Transactions of the American Mathematical Society 365 pp.2447-pp.2467, 2013. 査読有り

J.S. Guo, C.S. Lin and M. Shimojo, Blow-up for a reaction-diffusion equation with variable coefficient, Applied

Mathematics Letters pp.150-153, 2013 .  
査読有り

M. Shimojo and N. Umeda, Blow-up at space infinity for solutions of cooperative reaction-diffusion systems Funkcialaj Ekvacioj 54-2, 日本数学会函数方程式論分科会, pp.315-334, 2011 . 査読有り

J.S. Guo and M. Shimojo, Blowing up at the zero point of potential, Communication on Pure and Applied Analysis 10-1, Am. Inst. Math. Sci. 2011, pp.161-177 . 査読有り

Y.L. Guo and M. Shimojo, Blow-up for parabolic equation and system with nonnegative potential, Taiwanese Journal of Mathematics 15-3, Math. Soc. Repub. China, pp.995-1005 2011 . 査読有り

下條昌彦:外力項付き曲率流のある自由境界問題, 数理解析研究所講究録, 2015. 査読無し

〔学会発表〕(計 15 件)

下條昌彦:“On a free boundary problem for the curvature flow with driving force”, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid, Spain, 2014年7月8日

下條昌彦:“On a free boundary problem for the curvature flow with driving force”, Tongji University PDE seminar, Tongji Univ., Shanghai, China, 2014年3月24日

下條昌彦:“On a free boundary problem for the curvature flow with driving force”, International conference on. Applied Mathematics Mini Symposia. ACMAC, Heraklion, Greek, 2013年9月16日

下條昌彦:“Complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity”, 第14回北東数学解析研究会, 東北大学, 2013年2月19日

下條昌彦:“Control of blow-up set by space-dependent nonlinearity for semilinear parabolic equation”, 第5回東北楕円型・放物型微分方程式研究会, 東北大学, 2013年1月26日

下條昌彦:“半線形熱方程式の爆発点の制御について”, 拡散と移流の数理, 愛媛大学, 2012年12月1日

下條昌彦:“Control of blow-up set by space-dependent nonlinearity for semilinear parabolic equation”, 日本数学会(関数方程式分科会), 九州大学, 2012年9月20日

下條昌彦:“Control of blow-up set by space-dependent nonlinearity for semilinear parabolic equation”, 札幌シンポジウム, 北海道大学, 2012年8月25日

下條昌彦: “Complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity”, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Hyatt Regency Grand Cypress, Orland, America, 2012年7月4日

下條昌彦: “半線形複素熱方程式系の時間大域解の挙動と爆発現象”, 北海道大学 PDE セミナー, 北海道大学, 2012年4月16日

下條昌彦: Convergence and blow-up of solutions for a complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity”, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations-, East China Normal Univ., 2011年11月4日

下條昌彦: “半線形複素熱方程式系の時間大域解の挙動と爆発現象”, 岡山解析・確率論セミナー, 岡山大学, 2011年7月6日

下條昌彦: “半線形熱方程式の爆発現象入門”, 岡山大学, 集中講義, 2011年7月4日～8日

下條昌彦: “半線形熱方程式の爆発現象入門”, 非線形偏微分方程式の応用, 京都大学数理解析研究所, 2011年2月15日

下條昌彦: “半線形熱方程式の爆発点の制御について”, 非線形偏微分方程式の応用, 京都大学数理解析研究所, 2011年2月15日

〔図書〕(計 1 件)

「非線形熱方程式の爆発問題入門」 - Marek Fila氏講義録 -, 俣野博(監修), 下條昌彦(記), 東京大学数理科学レクチャーノート, 2011, 全248ページ

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

下條 昌彦 (SHIMOJO, Masahiko)

岡山理科大学・理学部・講師

研究者番号 : 23740128